http://stvalery-lyc.spip.ac-rouen.fr/spip.php?article2883

Math et Covid-19 : L'éclairage des graphes

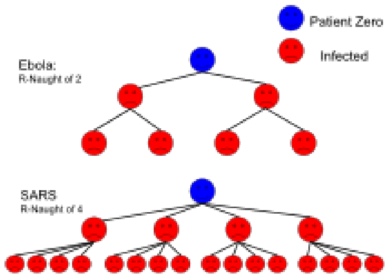
- Ressources pédagogiques - ... par discipline - ..en mathématiques -

Date de mise en ligne : mercredi 6 mai 2020

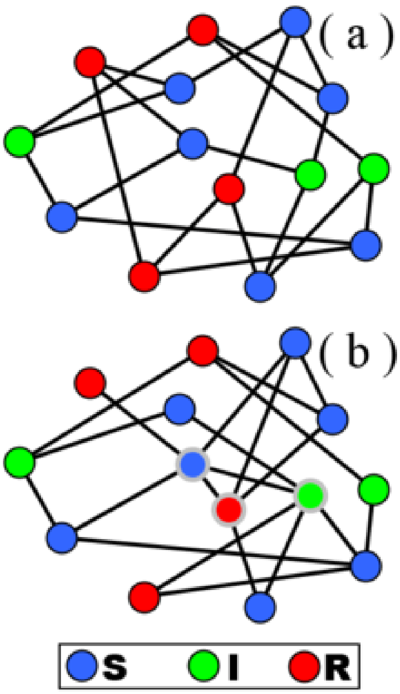
Quelques modèles de graphes utilisés en épidémiologie

Dans l'article précédent sur le coefficient R0, on a vu qu'une façon de modéliser l'épidémie consistait à considérer que chaque malade en contamine un certain nombre durant une certaine période de temps.

Un premier graphe qui peut représenter la situation (ici avec des R0 égaux à 2 et 4) consiste à tracer un arbre de dénombrement .



Seulement dans des modélisations un peu plus fines, on essaie de prendre en compte le fait que chaque malade n'a pas le même comportement social (notamment) et que dans la réalité il ne faut pas modéliser la situation par un graphe (de type réseau social) où chaque individu est relié au même nombre de contacts mais par un graphe dans lequel certains individus ont de nombreux contacts (dans un graphe représentant un réseau social, on pourrait qualifier un tel individu de "relais d'opinion" ou "influenceur", en épidémiologie il sera plutôt qualifié de "super contaminant") et d'autres ont très peu de contacts.



Le graphique ci-dessus (source wikipédia) propose deux graphes avec des individus sains (S), infectés (I) ou guéris (R). Sur le (a) chaque individu a trois contacts, dans le graphe (b) les individus en gris sont des relais plus importants de la maladie (s'ils sont infectés).

Ce type de graphe est abordé en seconde en SNT (réseau informatique, structure du web, réseau routiers en cartographie, réseau social) et dans les programmes de spécialité en TS et TES, dans le futur programme de math expertes aussi.

Un type de graphe est particulièrement utilisé pour modéliser une épidémie, c'est le graphe probabiliste, dont nous allons présenter deux exemples (niveau TES).

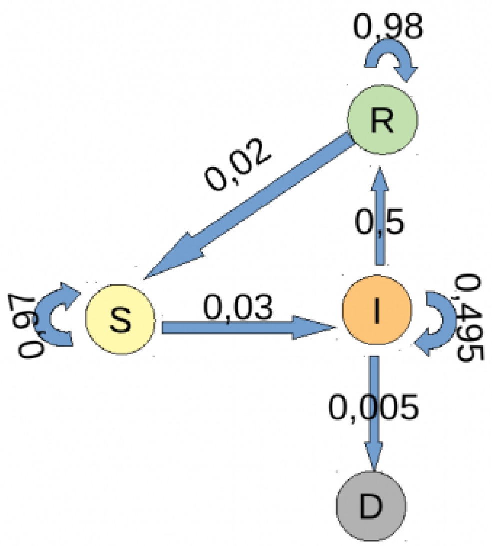
Modèle SIR

Dans le modèle SIR, on représente la situation épidémique par un graphe à trois sommets : S (les individus sains), I (les individus infectés) et R (les individus guéris et généralement considérés comme immunisés durablement).

Comme tout modèle mathématique, plus il est simple, plus il est facile à utiliser, mais plus il est caricatural... Il existe donc des améliorations qui le complexifient mais qui permettent de mieux rendre compte de la réalité.

Certains modèles plus fins incluent d'autres catégories comme Q (mis en quarantaine), ou des sous catégories de I (notamment si on est infecté mais plus contagieux, ou exposé sans vraiment être infecté, ou selon la charge virale (et donc la contagiosité) des individus...)
Dans la suite nous nous contenterons d'ajouter un sommet D pour les personnes décédées.
Les modèles plus élaborés vont aussi proposer des taux de passage d'un stade à un autre qui varient en fonction de divers paramètres mais dans la modélisation succincte qui est exposée ci-dessous on va considérer pour des périodes d'une semaine que :
" une personne saine a une probabilité de 3 % de devenir infectée, et sinon elle reste saine
" une personne infectée à une probabilité de 0,5 % de décéder, de 49,5 % de rester infectée (et contagieuse) pour la semaine suivante , et de 50 % de guérir.
" une personne guérie à une probabilité de 98 % de rester guérie et immunisée et de 2 % de passer dans la population saine mais non immunisée (dans le cas du covid-19 cette question n'était pas encore tranchée début mai).

On obtient ainsi le graphe probabiliste suivant :



À ce graphe on associe une matrice de transition dans laquelle les lignes et colonnes correspondent aux états S, I, D et R (dans cet ordre), et les coefficients aux probabilités de passer d'un état (en ligne) à un état (en colonne), ainsi le nombre 0.5 correspond à la probabilité de passer de I (infecté, en deuxième ligne) à R (guéri, en quatrième colonne).

$$M=\begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 & 0 & 0 \\ 0 & 0,495 & 0,005 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,02 & 0 & 0 & 0,98 \end{pmatrix}$$

Cette matrice de transition permet de calculer l'évolution de l'épidémie.
En effet, si on part d'une situation initiale où la population est saine à 99,5 % et infectée à 0,5 %, et si on note Pn la matrice qui donne les probabilités pour une personne d'être saine, infectée, décédée ou guérie, *n* semaines après le début de l'épidémie on va avoir :
P0=(0.995 0.005 0 0) et pour tout *n* Pn+1=Pn*M .

On peut alors estimer la situation au bout d'une semaine en calculant :
P1= P0*M= (0,965 0,032 0,00025 0,0025) environ.

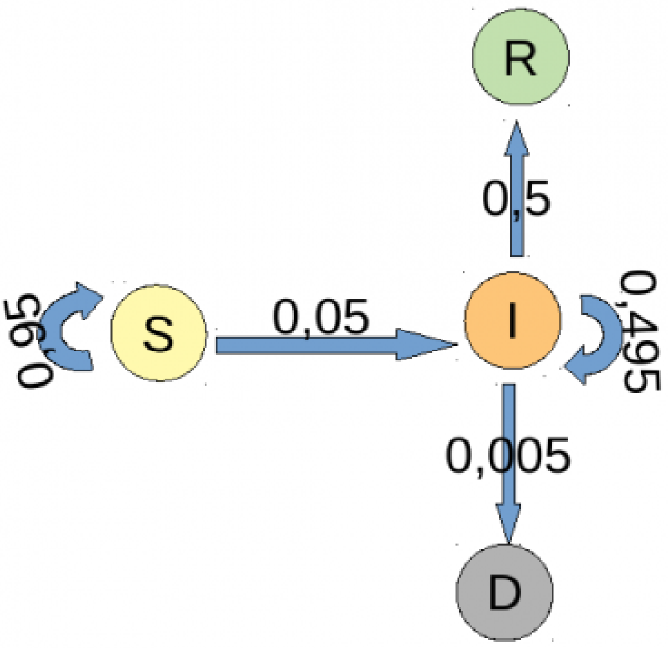
Si on veut l'évolution au bout d'un grand nombre de semaines, comme on remarque que la formule est la même que pour les suites géométriques, on peut utiliser la formule explicite valable pour celles-ci (un=u0*qn) ; au bout de 10 semaines la situation serait par exemple :
P10= P0*M10= (0,75 0,047 0,002 0,2) environ. Soit 75% de personnes saines, 4.7% de personnes infectées, 0.2% de décès et 20% de personnes guéries.

Si on veut estimer la situation dans un an (52 semaines) on calcule :
P52= P0*M52=(0,427 0,026 0,009 0,538) environ soit 53,8 % de la population qui serait immunisée (du moins provisoirement) et 0,9% de la population qui serait décédée.

Évidemment les hypothèses qui sont faites ont un impact décisif sur les résultats, comme on l'a vu avec le covid-19 pour lequel la connaissance du virus était très limitée ce qui a conduit les chercheurs à produire des modélisations aux résultats très différents, et pourtant ces modélisations sont fondamentales pour les prises de décisions des pouvoirs publics.
La suite de l'article propose une autre modélisation avec cette fois-ci une immunité durable.

modélisation avec immunité durable

Le graphe ci-dessous reprend les hypothèses précédentes mais avec une contagiosité accrue (5% contre 3%, pour la probabilité de passer de sain à infecté) et surtout avec une immunité définitive (plus de retour de R à S).



On obtient la matrice de transition suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,495 & 0,005 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et avec la même hypothèse initiale (0.5% de personnes infectées au moment où l'épidémie est détectée) on obtiendrait au bout d'un an environ (0,07 0,007 0,009 0,914) soit 91,4 % de personnes immunisées et un virus qui ne circule pratiquement plus, mais à nouveau 0,9 % de décès (ce qui est surtout lié aux deux hypothèses suivantes : 0,5 % de décès parmi les personnes infectées, lesquelles le resteraient deux semaines en moyenne dans cette modélisation).

Un taux d'immunité de 2/3 (celui qui est estimé pour atteindre l'immunité collective dans le cas du covid-19) serait atteint au bout de 24 semaines.

