http://stvalery-lyc.spip.ac-rouen.fr/spip.php?article2881

Math et Covid-19 : Le R0 et la croissance exponentielle

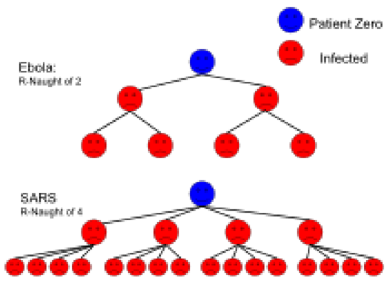
- Ressources pédagogiques - ... par discipline - ..en mathématiques -

Date de mise en ligne : mardi 5 mai 2020

Alors que s'annonce la perspective du déconfinement, les décideurs public et les médias surveillent de très près un mystérieux coefficient, baptisé R0.
le R0 quésaco ? Le but de cet article est de vous éclairez sur ce point ainsi que sur une expression qui est beaucoup revenue en début d'épidémie : sa "croissance exponentielle" d'autant que cette notion figure aux programmes de math en spécialité première, en terminale STMG, en enseignement scientifique en terminale, et sont aussi évoquées en SVT (datation au carbone 14), en sciences physiques (radioactivité), ou encore en géographie (croissance d'une population en plein essor) et en économie (critique des modèles de croissance) .

Le coefficient R0

En épidémiologie, le nombre de reproduction de base ou R0 d'une infection peut être considéré comme le nombre attendu de cas directement générés par un cas dans une population où tous les individus sont sensibles à l'infection.
Ainsi pour le Covid-19 le R0 (qui dépend de plusieurs facteurs - on y reviendra) est estimé entre 1,5 et 6. Pour la France il semble qu'il était initialement d'environ 3 pour une période d'environ 1 semaine, ce qui signifie qu'en début d'épidémie, chaque personne infectée en aurait contaminé 3 en une semaine, puis ces trois personnes en auraient contaminé 3 chacune...



(exemples avec ebola et le SRAS, source wikipedia)

On comprend bien qu'une épidémie dont le R0 est en-dessous de 1 va finir par s'éteindre, tandis qu'une épidémie dont le R0 est supérieur à 1 va croître.

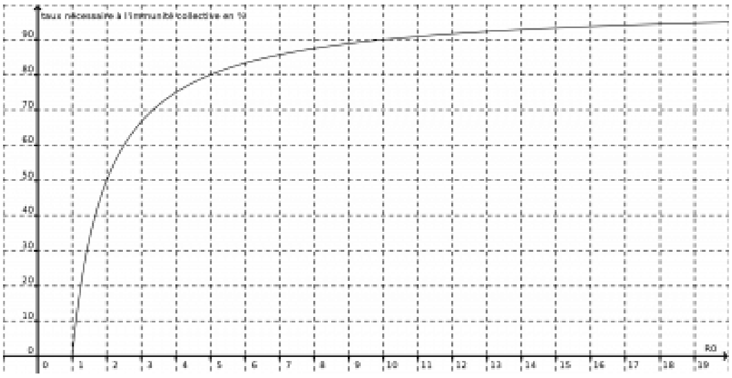
Certaines modélisations présentent le coefficient R0 comme égal au produit R0=*p*c*d* où *p* est la probabilité de contaminer une personne, *c*, le nombre de contacts par unité de temps, et *d* la durée de contagiosité.

Pour diminuer le coefficient R0, les autorités peuvent jouer sur les trois facteurs :

- imposer des vêtements de protection ou des mesures de distanciation afin de diminuer la probabilité de contagion ;
- prendre des mesures pour limiter le nombre de contacts entre les personnes ;
- utiliser des anti-viraux ou tenter de dépister puis isoler les malades le plus tôt possible afin de diminuer la période durant laquelle ils sont actifs dans la contagion.

Une fois qu'une partie importante de la population est immunisée (soit suite à une contagion, soit suite à une vaccination) il ne faut plus parler normalement du R0 mais du taux de reproduction à l'instant présent (noté R(t) en général mais pour l'instant les médias ne parlent que de R0) puisque celui-ci va diminuer naturellement du fait d'une plus faible proportion de personnes pouvant être contaminées.

Une formule simple fait d'ailleurs le lien entre le coefficient R0 et la proportion de personnes immunisés pour que l'immunité collective suffise à arrêter la prolifération du virus : *p*=1-1/R0 ce qui donnerait pour le Covid-19 avec un R0=3 un taux de 1-1/3=2/3 (ce qui explique les environ 70 % de la population immunisée dont parlent les médias pour arriver à une immunité collective). On peut noter que pour la rougeole, qui est bien plus contagieuse avec un R0 estimé à 16, le taux d'immunisation de la population (et donc de vaccination ou de rougeole contractée à l'enfance) doit être de 1-1/16=93,75 %.

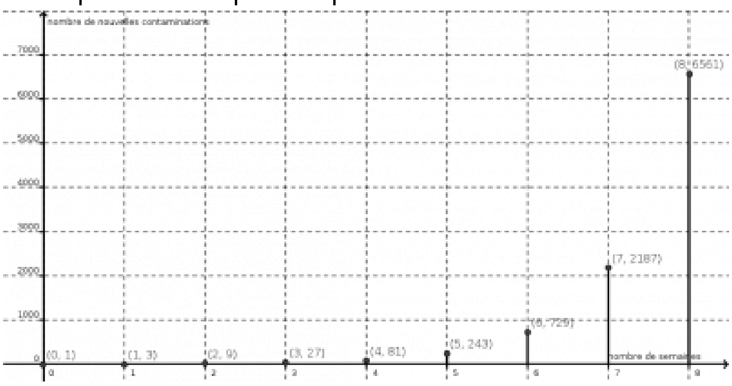


Dans la suite de cet article nous allons nous intéresser à la première phase de l'épidémie, avant les mesures de distanciation sociale et de confinement qui ont amené à une réduction du R0, et en particulier à cette expression : « croissance exponentielle du nombre de contamination ».

Modélisation par une suite géométrique

On considère pour le Covid-19 un R0 de 3 qu'on estime constant et calculé pour une période d'une semaine. Ainsi si on note un le nombre de personnes contaminées *n* semaines après le premier cas on a u0=1 puis u1=3 au bout d'une semaine, puis u2=9 au bout de deux semaines... et pour tout entier *n* positif un+1=3*un ce qui est la définition d'une suite géométrique de raison 3.

Si on représente l'évolution du nombre de malades, on constate une « explosion » rapide, caractéristique de ce qu'on appelle une croissance exponentielle, et qui ressemble exactement aux courbes des nombres de contaminations par pays dans les premiers temps de l'épidémie.

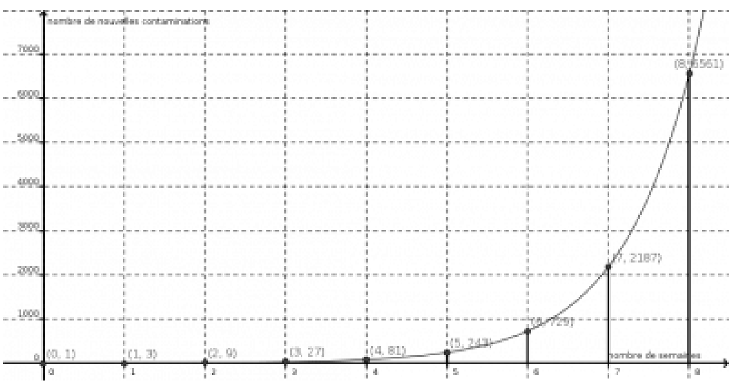


Ce modèle n'est valable qu'un temps puisqu'il tend vers l'infini et que le nombre d'humains n'est pas infini ; ce modèle laisse ensuite la place à une modélisation par une courbe de Gauss (voir [le premier article de cette série sur les math et le Covid-19]) dont les médias se demandent encore s'il faut qualifier son sommet de pic ou de plateau.

Remarque :
On retrouve ce type de raisonnement dans de nombreux domaines, en économie notamment, où les tenants de la théorie de la décroissance se basent sur ce même argument : l'impossibilité d'une croissance continue (modélisée par une suite géométrique de raison 1,03 par exemple pour 3 % de croissance) tendant vers l'infini, alors que les ressources mondiales sont finies (ce qui est sujet à débat : l'énergie solaire, par exemple, semblant quasi-infinie à l'échelle humaine (mais la capter consomme des ressources limitées), et puis certains argumentent pour une croissance non destructrice des ressources, peu développée pour lors).

Modélisation par une fonction exponentielle :

L'inconvénient de la modélisation par une suite géométrique c'est qu'elle ne donne de valeurs qu'à chaque unité de temps (ici une semaine), une autre modélisation plus fine est possible avec les fonctions exponentielles.
On peut remarquer que si R0 ne fluctue pas, la vitesse de propagation du nombre de personnes contaminées est proportionnelle à ce nombre de personnes contaminées. Si on note *N(t)* le nombre de personnes contaminées, la vitesse de propagation "instantanée" la dérivée *N'(t)*, notée en sciences physiques *dN/dt*, et celle-ci est alors proportionnelle au nombre de personnes contaminées *N(t)*. Or ce type d'équation différentielle (c.a.d équation dont l'inconnue est une fonction et où intervient sa dérivée) *f'=k*f* a pour solution une fonction exponentielle.
Plus précisément la fonction exponentielle naturelle est la fonction définie par *f(x)=ex* telle que *f'=f* et *f*(0)=1.
Pour en revenir au Covid -19 et en prenant comme unité de temps le nombre de jours, nous avons *f*(0)=1 et *f*(7)=3 (le patient zéro, seul au départ, puis les trois personnes contaminées sept jours plus tard) ce qui permet d'affirmer que *f(t)*=e(ln(3)**t*)/7=3*t*/7
On retrouve au passage la formule explicite pour notre suite géométrique un=u0* qn=3n=*f*(7*t*) puisque ici *n*=7*t* (*n* en semaines et *t* en jours).
On vérifie graphiquement que la courbe de la fonction correspond bien aux termes de la suite mais en la prolongeant entre deux valeurs.



Remarque :
On a le même phénomène pour les isotopes radioactifs, par exemple l'isotope 131 de l'iode (qui se retrouve en abondance dans les accidents nucléaires et les explosions de bombe A) a une période de demi-vie d'environ 8 jours,

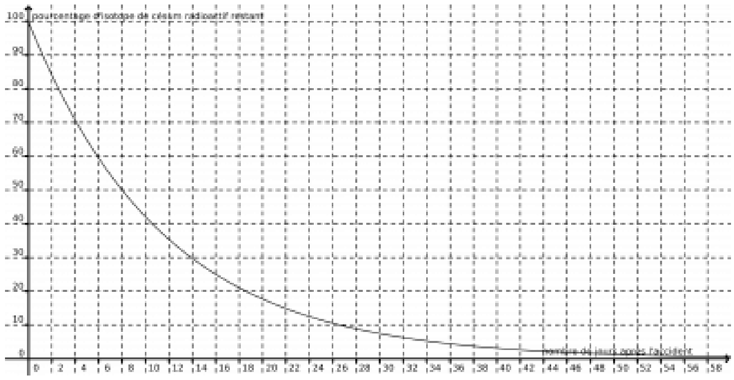
c.a.d que tous les 8 jours la moitié des atomes d'iode 131 s'est désintégrée, et ce indépendamment de la quantité initiale, et de l'âge des atomes (que l'explosion qui les a créé date de la veille où d'il y a un an, il y a toujours en moyenne la moitié des atomes restants qui se désintègre tous les 8 jours.)

Cela correspondrait à un R0 de 0.5 pour une période de huit jours si on dressait un parallèle avec le covid. Dans ce cas on a une diminution du nombre d'isotopes radioactifs selon une fonction exponentielle égale à $N(t)=N(0)*e^{\ln(0.5)*t/8}=N(0)*0.5^{t/8}$

Or $0.5^{30/8}= 0.074$ environ, donc au bout de trente jours il ne reste plus que 7.4% de la quantité émise lors de la catastrophe.

C'est pour cela qu'on distribue des cachets d'iode 127 non radioactive en cas d'accident nucléaire, cela permet de saturer l'organisme en iode et donc d'éviter la fixation de l'iode radioactif dans l'organisme (où il contribue à l'apparition de cancers à cause de sa radioactivité), en attendant que l'iode radioactif se désintègre, ce qu'il fait très rapidement, puisque tous les 8 jours il en manque la moitié (décroissance exponentielle).

Pour le césium qui se fixe aussi dans l'organisme en cas d'accident nucléaire, la période de demi-vie est de 30 ans, pour le plutonium utilisé dans certaines bombes, la période de demi-vie est de 80 millions d'années...



Le dosage du carbone 14 résiduel dans un objet ancien, par rapport au carbone 14 initial (connu car ayant peu bougé avant la révolution industrielle qui a remis du carbone ancien dans l'atmosphère) permet aussi de retrouver le temps *t* écoulé entre la réalisation de l'objet et l'époque actuelle : c'est le principe de base de la datation au carbone 14.

sources sur le covid-19 :

france culture
groupe de travail CNRS
wikipédia en anglais
wikipédia en français
université de Montreal

