Méthode de balayage avec une calculatrice Casio

- Ressources pédagogiques - ... par discipline - ..en mathématiques -

Date de mise en ligne : dimanche 10 janvier 2010

L'énoncé est le suivant :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^5 - 5x - 5$.
1. Calculer $f'(x)$. Dresser le tableau de variations de f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique que l'on notera α .
Calculer $f(2)$ et en déduire un encadrement de α .
3. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près .

Voici la solution de l'exercice

1. La fonction f est dérivable et , pour tout réel x , $f'(x) = 5x^4 - 3 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$.
Un carré étant toujours positif ou nul , $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, pour tout réel x .
On en déduit que $f'(x)$ a le même signe que $x^2 - 1$.
$x^2 - 1$ s'annulant lorsque $x = -1$ ou $x = 1$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

f étant une fonction polynôme , la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle de son monôme de plus haut degré , donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^5) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^5) = +\infty$.

2.
- Comme f admet un maximum égal à -1 sur l'intervalle $]-\infty;1]$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle .
- Comme f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et que 0 appartient à l'intervalle d'extrémités $f(1) = -9$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on en conclut , grâce au théorème des valeurs intermédiaires , que $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[1;+\infty[$.
- Conclusion : $f(x) = 0$ admet une solution unique que nous noterons α dans $\mathbb{R}$.
- Comme $f(2) = 2^5 - 5 \times 2 - 5 = 17 > 0$ et $f(1) < 0$, on a $f(1) < f(\alpha) < f(2)$, ce qui implique que $1 < \alpha < 2$, car f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

3. Comme $f(1{,}68) < f(\alpha) < f(1{,}69)$, ce qui implique que $1{,}68 < \alpha < 1{,}69$, car f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

et une animation qui vous permettra de faire la manipulation sur votre calculatrice .

<object classid='clsid:d27cdb6e-ae6d-11cf-96b8-444553540000' codebase='http://fpdownload.macromedia.com/pub/shockwave/cabs/flash/swflash.cab#version=6,0,0,0' width='348' height='742'> <param name='class' value='' /> <!--[if !IE]> «--» <param name='class' value='' /> <!--» <![endif]--»