Soutien math, séance 2 : **Revoir les nombres complexes.**

I- Les définitions et leur signification géométrique.

Rappels (à compléter au fur et à mesure si nécessaire)

1-Placer sur le graphique ci-contre les points M,N, P,Q et R d'affixes $z_M=-2+i2\sqrt{3}$ $z_N=2-2i$

$z_P=(1+i)z_N$ $z_Q=\overline{z_N}$ et $z_R=\dfrac{1}{z_M}$

2-a- Calculer le module de z_M

b- Calculer ON (où O est l'origine du repère)

c- Calculer $|1+i|$ et en déduire OP.

d- Donner aussi OQ et OR.

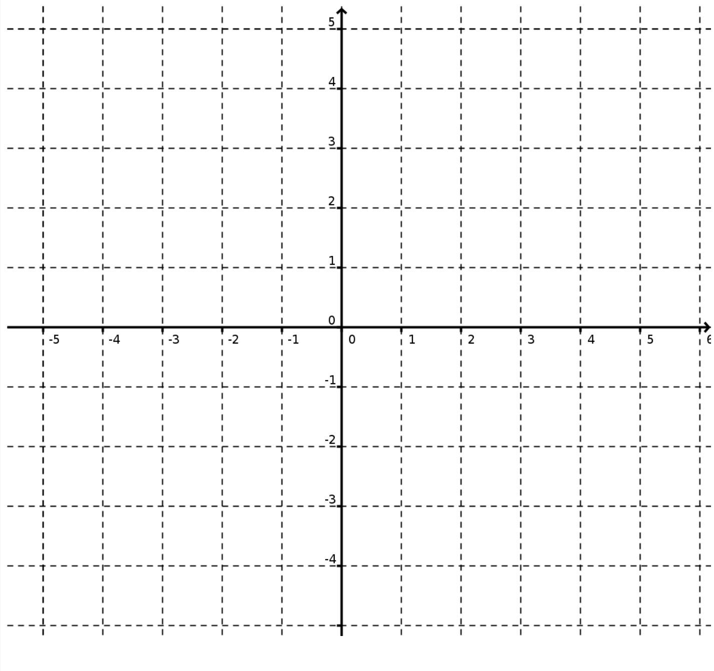
3-a- On note α une mesure de l'argument de z_M . Donner $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

b- En déduire α et interpréter graphiquement.

c- Déterminer une mesure de $arg(z_N)$ puis de $arg(z_Q)$.

d- Déterminer une mesure de arg(1+i) et en déduire une mesure de $(\vec{u};\vec{OP})$ puis de $(\vec{u};\vec{OR})$.

e- En déduire une mesure de l'angle $(\vec{OR};\vec{OP})$.



II- Les calculs et résolutions d'équations.

1-Mettre sous forme algébrique un quotient :

Ecrire sous forme algébrique $\dfrac{1+i}{3-2i}$ et $\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$

2- Résoudre une équation simple dans $\mathbb{C}$:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) 2z+3i=5i-2 b) 3(iz-2)+5-i=(3+2i)z+1 c) $\dfrac{2+iz}{z+3i}=2i-3$ d) $\dfrac{2z-i}{(3+i)z+2-5i}=-i$ e) (3 z+2i)(i z - 5)=0

3-Résoudre une équation du second degré à **coefficients réels** dans $\mathbb{C}$:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation suivante : $2z^2-3z+5=0$

III-Pour s'entraîner :

A- On considère les nombres complexes $a=1-i$ et $b=1+\sqrt{3}i$

1- Calculer le module et un argument des nombres *a* et *b*

2- On considère les nombres complexes $c=ab$ et $d=\dfrac{b}{a}$

a- Déterminer le module et un argument des nombres complexes *c* et *d.*

b- Déterminer la forme algébrique de *c* et *d.*

c- En déduire des valeurs exactes de sinus et cosinus de $\dfrac{\pi}{12}$ et de $\dfrac{7\pi}{12}$.

B- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1- Résoudre $z^2-4z+6=0$

2- On désigne par C et D les points d'affixes $c=2+i\sqrt{2}$ et $d=2-i\sqrt{2}$.

a- Déterminer la forme algébrique du nombre $\dfrac{c-3}{c}$

b-On place B d'affixe 3. En déduire que le triangle OBC est rectangle.

3- Déterminer l'affixe du point A tel que CBAO soit un rectangle.

Correction des exercices

II-1- $\frac{1+i}{3-2i}=\frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{3+3i+2i+2i^2}{3^2+2^2}=\frac{1+5i}{13}$ et $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}{\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+i(2+\sqrt{3})}{5}$

2-a) 2z+3i=5i-2 <=>z=-1+i b) 3(iz-2)+5-i=(3+2i)z+1 <=>3iz-6+5-i=3z+2iz+1<=>-2-i=3z-iz <=>

$z=\frac{-i-2}{3-i}=-0,5-0,5i$ en utilisant la calculatrice pour la forme algébrique

c)

$\frac{2+iz}{z+3i}=2i-3\Leftrightarrow 2+iz=(2i-3)(z+3i)\Leftrightarrow 2+iz=2iz-3z-6-9i\Leftrightarrow(3-i)z=(-8-9i)\Leftrightarrow z=\frac{-8-9i}{3-i}=-1,5-3,5i$

d) $\frac{2z-i}{(3+i)z+2-5i}=-i\Leftrightarrow 2z-i=(-3i+1)z-2i-5\Leftrightarrow i+5=(-3i-1)z\Leftrightarrow\frac{i+5}{-3i-1}=z=-0,8+1,4i$

e) $(3z+2i)(iz-5)=0\Leftrightarrow 3z+2i=0\,ou\,iz-5=0\Leftrightarrow z=\frac{-2}{3}i\,ou\,z=\frac{5}{i}=-5i$

3) Equation de degré 2 à coefficients réels :on calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4\text{ac}=(-3)^2-4\times2\times5=-31<0$.

Il est négatif donc il y a deux solutions complexes conjuguées : $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{3-i\sqrt{31}}{4}$ et $\frac{3+i\sqrt{31}}{4}$

A- On considère les nombres complexes $a=1-i$ et $b=1+\sqrt{3}i$

1- $|a|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ *et de même* $|b|=2$ *et si on note* α *l'argument de a on obtient*

$\cos(\alpha)=\frac{\Re(a)}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin(\alpha)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ *d'où par lecture du cercle trigonométrique* $\alpha=\frac{-\pi}{4}[2\pi]$ *et on trouve de même* $arg(b)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

2- On considère les nombres complexes $c=ab$ et $d=\frac{b}{a}$

a- $|c|=|ab|=|a|\times|b|=2\sqrt{2}$ *et* $|d|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ *et pour l'argument*

$arg(c)=arg(ab)=arg(a)+arg(b)=\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}[2\pi]$ *et* $arg(d)=arg(b)-arg(a)=\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

b- Déterminer la forme algébrique de *c* et *d.*

$c=(1-i)(1+i\sqrt{3})=1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)$ *et*

$d=\frac{(1+i\sqrt{3})}{(1-i)}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

c- *Comme* $arg(c)=\frac{\pi}{12}$ *et que son cosinus est égal à* $\frac{\Re(c)}{|(c)|}$ *on obtient* $\cos(\frac{\pi}{12})=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *et de même*

$\sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ *puis avec d:* $\cos(\frac{7\pi}{12})=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ $\sin(\frac{7\pi}{12})=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

B- 1- Résoudre $z^2-4z+6=0$

On reconnaît un polynôme de degré 2 à coefficient réels, le discriminant est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times6=-8$ *donc il y a deux solutions complexes conjuguées :* $z_1=\frac{4-i\sqrt{8}}{2}=2-i\sqrt{2}$ *et* $z_2=2+i\sqrt{2}$

2- On désigne par C et D les points d'affixes $c=2+i\sqrt{2}$ et $d=2-i\sqrt{2}$.

a- $\frac{c-3}{c}=\frac{2+i\sqrt{2}-3}{2+i\sqrt{2}}=\frac{(-1+i\sqrt{2})(2-i\sqrt{2})}{2^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{-2+i\sqrt{2}+2i\sqrt{2}+2}{6}=i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b-On place B d'affixe 3. En déduire que le triangle OBC est rectangle.

Il semble rectangle en C et en effet $\frac{c-3}{c}$ *est un imaginaire pur donc les vecteurs* $\vec{BC}$ *d'affixe c-3 et* $\vec{OC}$ *d'affixe c sont orthogonaux, il y a donc un angle droit en C.*

On peut aussi dire que $arg(\frac{c-3}{c})=(\vec{OC};\vec{BC})$ *et il vaut* $\frac{\pi}{2}$ *modulo* 2π *car* $\frac{\sqrt{2}}{2}\in i\mathbb{R}$ *et* $\frac{\sqrt{2}}{2}>0$.

3- Déterminer l'affixe du point A tel que CBAO soit un rectangle.

On a déjà un angle droit, il suffit donc de trouver A tel que CBAO soit un parallélogramme, c.a.d tel que

$\vec{CB}=\vec{OA}\Leftrightarrow b-c=a\Leftrightarrow 3-(2+i\sqrt{2})=a$ *et donc* $a=1-i\sqrt{2}$