SOUTIEN : La fonction logarithme népérien

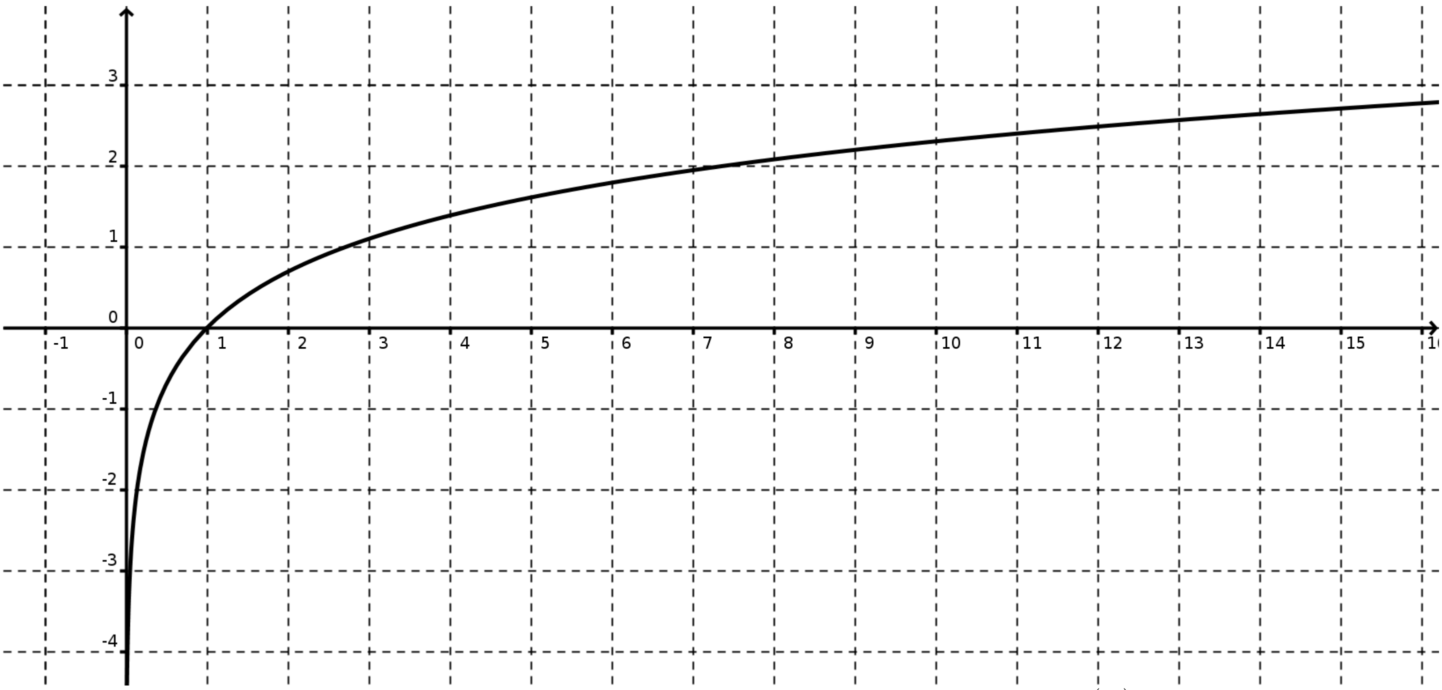
I- Etudes de fonctions avec des logarithmes

1- L'ensemble de définition : Il faut se rappeler que l'on ne peut mettre que des nombres positifs à l'intérieur de la fonction ln (ln(x) n'existe que pour x>0)

Exercice 1 : Sur quels ensembles peut-on définir les fonctions suivantes :

$f(x)=\ln(3-x)$ $\quad g(x)=(2+\ln(x))^2$

Rq : Par contre il ne faut confondre avec le signe de ln(x). ln(x) existe uniquement si x>0 mais ln(x) n'est pas toujours positif.



ln est strictement croissante et ln(1)=0 donc ln(x) n'est positif qu'à partir de x=1 : $\ln(x)>0 \Leftrightarrow x>1$

2- Etude des variations

La fonction ln est strictement croissante,(ce qui permet de résoudre des inéquations : $\ln(x)>\ln(y) \Leftrightarrow x>y$), mais ce n'est évidemment pas le cas de nombreuses fonctions où apparaît un logarithme.
La méthode la plus courante est de calculer la dérivée de la fonction , en utilisant pour le logarithme les formules ci-dessous :

$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ et si *u* est une fonction dérivable strictement positive $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$

Exemple : Soit *f* définie pour *x*>0 par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, alors elle est dérivable sous la forme $f=\dfrac{u}{v}$ avec

$u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=x$ donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v'(x)=1$

et $f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ soit $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

Or le signe du dénominateur est positif (c'est un carré) et donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\ln(x)$; or $1-\ln(x)>0 \Leftrightarrow 1>\ln(x) \Leftrightarrow e^1>e^{\ln(x)} \Leftrightarrow e>x$ On en déduit que f' est positive sur]0;e[et négative pour *x*>e ; donc que *f* est croissante sur]0;e[et décroissante ensuite.

Exercice 2 : Etudier le sens de variation des fonctions suivantes : $f(x)=x\ln(x)-\dfrac{1}{2}$ $\quad g(x)=\ln(3x^2+1)$

3- Limites

A l'aide de la courbe on retient facilement les deux principales limites

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et de plus la fonction logarithme est en quelque sorte « dominée » par les puissances de *x* c.a.d $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$ ou encore $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

Et pour les fonctions du type ln(*u*) avec *u* une fonction, il faut commencer par la limite de *u* puis prendre celle du logarithme en la valeur trouvée pour *u*

Exemples :

$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x-5}{x^2-1}\right)$ On commence par cherche la limite de ce qui est dans le logarithme : $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-5}{x^2-1}$ qui est une forme indéterminée dont on se sort en factorisant artificiellement par x et x² le numérateur et le dénominateur : $\frac{2x-5}{x^2-1} = \frac{x \times (2 - \frac{5}{x})}{x^2 \times (1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{2 - \frac{5}{x}}{x \times (1 - \frac{1}{x^2})}$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-5}{x^2-1} = 0$ car du type « $\frac{2}{+\infty \times 1}$ » et ensuite on cherche la limite de « ln » mais, du coup, en 0 : $\lim_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$ et donc par composition :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x-5}{x^2-1}\right) = -\infty$$

Exercice 3 : Calculer :a) $\lim_{x \to 3} \ln(x-3)$ b) $\lim_{x \to +\infty} (3-x)\ln(x^2)$ c) $\lim_{x \to 0} x\ln(x) + \frac{1}{x}$ d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)+3}{2-x}$

4-Primitives et intégrales

Les fonctions dont la forme peut s'écrire $\frac{u'}{u}$ admettent des primitives sous la forme $\ln(u)+k$ (si *u*>0) (ou $\ln(-u)+k$ si *u*<0)

Exemple : $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$ définie pour x>0 est de la forme $f = \frac{\frac{2}{3}u'}{u}$ avec $u(x) = 3x+1$ donc $u'(x) = 3$ et donc une primitive de *f* est $F(x) = \frac{2}{3}\ln(3x+1)+k$ (car $u(x) = 3x+1 > 0$ si *x*>0)

Exercice 4 :

Calculer $\int_2^5 \frac{x}{x^2+1} dx$ et $\int_1^e \frac{1}{x} + x + 2\, dx$.

II- Relations fonctionnelles

Rappel :

Pour tous réels *x*>0 et *y*>0 et pour tout entier relatif *p* on a:

$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^p) = p\ln(x)$ pour *p* entier. $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Attention : Il ne faut pas les confondre avec celles de l'exponentielle ; par exemple si on veut transformer $\ln(e^{2x} - e^x)$ on peut être tenté (et dans un QCM on peut vous y inciter) d'écrire $\ln(e^{2x}) - \ln(e^x)$ ou encore $\frac{\ln(e^{2x})}{\ln(e^x)}$ qui sont fausses toutes les deux ; on ne sait rien faire avec une somme à l'intérieur d'un logarithme ! Ce qu'il nous faut c'est un produit ou un quotient : Et effectivement en factorisant à l'intérieur par e^x on trouve : $\ln(e^{2x} - e^x) = \ln(e^x(e^x - 1)) = \ln(e^x) + \ln(e^x - 1) = x + \ln(e^x - 1)$ car bien sûr $\ln(e^x) = x$

Exercice 5 :
A- Ecrire sous la forme d'un seul logarithme :
$\ln(2x-1)+\ln(x+2)$ $\ln(x+3)-2\ln(1+x)$
Astuce : Si vous avez le temps (et en particulier dans le cas d'un QCM sans justification), vous pouvez vérifier vos égalités en demandant à la calculatrice le même tableau de valeurs (n'importe lesquelles) pour vos deux expressions (en Y1 et Y2). Si vous avez les mêmes valeurs pour les deux expressions, votre égalité est sans doute vraie.
B- Ecrire en fonction de ln(2) :
ln(6)-ln(12) $\ln(\frac{1}{8})$ ln(9)-2ln(6)
(Là il est encore plus simple de vérifier, avec les valeurs approchées données par la calculatrice)

Correction des exercices :

Exercice 1 : Sur quels ensembles peut-on définir les fonctions suivantes :
$f(x)=\ln(3-x)$ $g(x)=(2+\ln(x))^2$

$f(x)$ existe si et seulement si $3-x>0 \Leftrightarrow 3>x$ donc *f* définie sur $]-\infty;3[$
Et *g* est définie pour tout *x*>0 .

Exercice 2 : Etudier le sens de variation des fonctions suivantes : $f(x)=x\ln(x)-\frac{1}{2}$ $g(x)=\ln(3x^2+1)$

On calcule pour tout $x>0$ $f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}-0=\ln(x)+1$ en utilisant la dérivée $(uv)'=u'v+v'u$ avec *u*(*x*)=*x* et *v*(*x*)=ln(*x*).
On étudie son signe en résolvant $\ln(x)+1>0 \Leftrightarrow \ln(x)>-1 \Leftrightarrow e^{\ln(x)}>e^{-1} \Leftrightarrow x>e^{-1}$ et donc *f '* est positive pour tout $x>e^{-1}$ et négative pour $x<e^{-1}$ ce qui donne *f* croissante sur $[e^{-1};+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;e^{-1}]$.
Pour *g* qui est définie pour tout x réel puisque ce qu'on met dans le logarithme, 3*x*²+1 est toujours strictement positif, on reconnaît la forme $g=\ln(u)$ avec $u(x)=3x^2+1$ soit $u'(x)=6x$ donc $g'=\frac{u'}{u}$ soit $g'(x)=\frac{6x}{3x^2+1}$.
Son signe est celui de 6*x* donc celui de *x*, donc *g* est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.

Exercice 3 : Calculer
a) $\lim_{x\to3}\ln(x-3) = \lim_{X\to0}\ln(X)=-\infty$ car $\lim_{x\to3} x-3=0$ (par composition donc)
b) $\lim_{x\to+\infty}(3-x)\ln(x^2)$ On sait que ln(*x*²)=2ln(*x*) (ou on passe par la limite de x² et on compose) et $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(3-x)=-\infty$ donc en utilisant les règles sur la limite d'un produit on obtient : $\lim_{x\to+\infty}(3-x)\ln(x^2)=-\infty$
c) $\lim_{x\to0} x\ln(x)+\frac{1}{x}=+\infty$ par somme car $\lim_{x\to0} x\ln(x)=0$ (Forme indéterminée, mais vue dans le cours) et $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=+\infty$ (résultat de cours, en sachant qu'ici *x*>0 sinon on ne pourrait pas parler de ln(x))
d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+3}{2-x}$ On a une forme indéterminée, on factorise par les termes dominant :
$\frac{\ln(x)+3}{2-x}=\frac{\ln(x)(1+\frac{3}{\ln(x)})}{x\times(\frac{2}{x}-1)}=\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{1+\frac{3}{\ln(x)}}{\frac{2}{x}-1}$ or $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ car on sait que x l'emporte en l'infini sur le logarithme, et le reste tend vers $\frac{1}{-1}=-1$ donc en faisant le produit : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+3}{2-x}=-\infty$.

Exercice 4 :

Calculer $\int_2^5 \frac{x}{x^2+1}dx$ et $\int_1^e \frac{1}{x}+x+2\,dx$.

$\int_2^5 \frac{x}{x^2+1}dx[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_2^5=\frac{1}{2}\ln(26)-\frac{1}{2}\ln(5)=\frac{1}{2}\ln(\frac{26}{5})=\ln(\sqrt{5{,}2})$ en utilisant les formules algébriques de la fonction ln pour « simplifier » ce qui n'était pas demander, et surtout en repérant au départ que $\frac{x}{x^2+1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+1$ donc $u'(x)=2x$ et donc $\frac{x}{x^2+1}=\frac{0{,}5u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)$ est positif donc une primitive est 0,5 ln(u) soit 0,5 ln(x^2+1).

$\int_1^e \frac{1}{x}+x+2\,dx=[\ln(x)+0{,}5\,x^2+2\,x]_1^e=1-0{,}5\,e^2+2\,e-2{,}5=-0{,}5\,e^2+2\,e-1{,}5$ En utilisant le sprimitives des fonctions usuelles.

Exercice 5 :

A- Ecrire sous la forme d'un seul logarithme :

$\ln(2x-1)+\ln(x+2)=\ln((2x-1)(x+2))=\ln(2\,x^2+3\,x-2)$ pour tout x>0,5 (pour que les deux logarithmes existent il faut avoir 2x-1>0 **et** x+2>0)

$\ln(x+3)-2\ln(1+x)=\ln(x+3)-\ln((1+x)^2)=\ln\left(\frac{x+3}{(1+x)^2}\right)$ pour tout x>-1.

B- Ecrire en fonction de ln(2) :

$\ln(6)-\ln(12)=\ln(\frac{6}{12})=\ln(\frac{1}{2})=-\ln(2)$ (par exemple, il y a d'autres méthodes)

$\ln(\frac{1}{8})=-\ln(8)=-\ln(2^3)=-3\ln(2)$

$\ln(9)-2\ln(6)=\ln(9)-\ln(36)=\ln(\frac{9}{36})=\ln(\frac{1}{4})=-\ln(4)=-2\ln(2)$ car $\ln(4)=\ln(2^2)$