SOUTIEN : La fonction logarithme népérien

I- Etudes de fonctions avec des logarithmes

1- L'ensemble de définition : Il faut se rappeler que l'on ne peut mettre que des nombres positifs à l'intérieur de la fonction ln (ln(x) n'existe que pour x>0)

Exercice 1 : Sur quels ensembles peut-on définir les fonctions suivantes :

$$f(x)=\ln(3-x) \qquad g(x)=(2+\ln(x))^2 \qquad h(x)=\ln\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)$$

Rq : Par contre il ne faut confondre avec le signe de ln(x). ln(x) existe uniquement si x>0 mais ln(x) n'est pas toujours positif.
Rappeler son tableau de signe :

2- Etude des variations

La fonction ln est strictement croissante,(ce qui permet de résoudre des inéquations : $\ln(x)>\ln(y)\Leftrightarrow x>y$), mais ce n'est évidemment pas le cas de nombreuses fonctions où apparaît un logarithme.
La méthode la plus courante est de calculer la dérivée de la fonction , en utilisant pour le logarithme les formules ci-dessous :

$\ln'(x)=\frac{1}{x}$ et si *u* est une fonction dérivable strictement positive $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

Exemples : Soit *f* définie pour *x*>0 par $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, alors elle est dérivable sous la forme $f=\frac{u}{v}$ avec $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=x$ donc $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=1$

et $f'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ soit $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$

Or le signe du dénominateur est positif (c'est un carré) et donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\ln(x)$; or $1-\ln(x)>0\Leftrightarrow 1>\ln(x)\Leftrightarrow e^1>e^{\ln(x)}\Leftrightarrow e>x$ On en déduit que f' est positive sur]0;e[et négative pour *x*>e ; donc que *f* est croissante sur]0;e[et décroissante ensuite.

Exercice 2 : Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$$f(x)=x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right) \qquad g(x)=\ln(3x^2+1) \qquad h(x)=\ln(2x-1)+\ln(3-x)$$

3- Limites

A l'aide de la courbe on retient facilement les deux principales limites

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et de plus la fonction logarithme est en quelque sorte « dominée » par les puissances de *x* c.a.d $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln(x)=0$ ou encore $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln(x)}=+\infty$ (avec $n\in\mathbb{N}$)

Et pour les fonctions du type ln(*u*) avec *u* une fonction, il faut commencer par la limite de *u* puis prendre celle du logarithme en la valeur trouvée pour *u*

Exemples :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-5}{x^2-1}\right)$ On commence par cherche la limite de ce qui est dans le logarithme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x^2-1}$ qui est une forme indéterminée dont on se sort en factorisant artificiellement par x et x² le numérateur et le dénominateur : $\frac{2x-5}{x^2-1}=\frac{x\times(2-\frac{5}{x})}{x^2\times(1-\frac{1}{x^2})}=\frac{2-\frac{5}{x}}{x\times(1-\frac{1}{x^2})}$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x^2-1}=0$ car du type « $\frac{2}{+\infty\times 1}$ »

et ensuite on cherche la limite de « ln » mais, du coup, en 0 : $\lim_{X\to 0}\ln(X)=-\infty$ et donc par composition : $\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{2x-5}{x^2-1})=-\infty$ (a vérifier en traçant la courbe, ou en demandant un tableau de valeurs à la calculatrice)

Exercice 3 : Calculer :a) $\lim_{x\to 3 (x<3)}\ln(\frac{1}{3-x})$ b) $\lim_{x\to+\infty}(3-x)\ln(x^2)$ c) $\lim_{x\to 0} x\ln(x)+\frac{1}{x}$ d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+3}{2-x}$

II- Relations fonctionnelles

Rappel :

Pour tous réels $x>0$ et $y>0$ et pour tout entier relatif p on a:

$\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)$ $\qquad \ln(\frac{1}{x})=-\ln(x)$ $\qquad \ln(\frac{x}{y})=\ln(x)-\ln(y)$

$\ln(x^p)=p\ln(x)$ $\qquad \ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$

Attention : Il ne faut pas les confondre avec celles de l'exponentielle ; par exemple si on veut transformer $\ln(e^{2x}-e^x)$ on peut être tenté (et dans un QCM on peut vous y inciter) d'écrire $\ln(e^{2x})-\ln(e^x)$ ou encore $\frac{\ln(e^{2x})}{\ln(e^x)}$ qui sont fausses toutes les deux ; on ne sait rien faire avec une somme à l 'intérieur d'un logarithme ! Ce qu'il nous faut c'est un produit ou un quotient : Et effectivement en factorisant à l'intérieur par e^x on trouve : $\ln(e^{2x}-e^x)=\ln(e^x(e^x-1))=\ln(e^x)+\ln(e^x-1)=x+\ln(e^x-1)$ car bien sûr $\ln(e^x)=x$

Exercice 4 :

A- Ecrire sous la forme d'un seul logarithme :

$\ln(2x-1)+\ln(x+2)$ $\qquad \ln(x+3)-2\ln(1+x)$ $\qquad \frac{\ln(x)\ln(x+2)}{\ln(2x)-\ln 2}$

Astuce : Si vous avez le temps (et en particulier dans le cas d'un QCM sans justification), vous pouvez vérifier vos égalités en demandant à la calculatrice le même tableau de valeurs (n'importe lesquelles) pour vos deux expressions (en Y1 et Y2). Si vous avez les mêmes valeurs pour les deux expressions, votre égalité est sans doute vraie.

B- Ecrire en fonction de ln(2) :

ln(6)-ln(12) $\qquad \ln(\frac{1}{4})$ $\qquad$ ln(9)-2ln(6)

(Là il est encore plus simple de vérifier, avec les valeurs approchées données par la calculatrice)

Exercice 5 :Exemples de résolution d'équation et d'inéquation :

Résoudre : a) $\ln(x^2-1)<2\ln 2$ b) $\ln(x-1)+\ln(x+1)=2\ln 2$

Indications : On n'oublie pas de préciser pour quelles valeurs de x ces expressions sont définies, puis on se ramène à l'(in)égalité de deux logarithmes en utilisant les relations fonctionnelles ; on peut alors se débarrasser des « ln » car la fonction « ln » est strictement croissante (voir plus haut) ; enfin on trouve les solutions des (in) équations avec les méthodes habituelles (il n'y a plus de « ln »).

En concluant on n'oublie pas de se limiter aux valeurs de x déterminées au départ.

Par exemple : Pour résoudre $\ln(2x)-2\ln(x-1)=0$ on commence par dire que $2x>0\Leftrightarrow x>0$ et $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ donc que $\ln(2x)-2\ln(x-1)=0$ n'a de sens que si $x\in]1\ ;+\infty[$

Ensuite pour x>1 l'équation est équivalente à $\ln(2x)-\ln((x-1)^2)=0\Leftrightarrow\ln(2x)=\ln((x-1)^2)\Leftrightarrow 2x=(x-1)^2$

Qu'on résout sous la forme d'un trinôme car en développant on obtient $2x=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$ dont les racines sont (après calcul) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ or cette dernière est inférieure à 1 ; ce n'est donc pas une solution de l'équation de départ (définie pour x>1) qui n'en admet donc qu'une seule $2+\sqrt{3}$

Rq : On pouvait aussi se ramener à $\ln(2x)-\ln((x-1)^2)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{(x-1)^2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x-1)^2}=1$ car ln(1)=0 (et c'est la seule possibilité) ; on multiplie alors par $(x-1)^2$ chacun des membres de l'équation pour retrouver l'équation de degré 2.