Soutien séance 4 : Les suites : Correction

Ex1 : Pour chacune des suites ci-dessous calculer les termes de rang 1, 2 et 3.

$u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=3u_n-5$

$u_1=3\times3-5=4$ $u_2=3\times4-5=7$ $u_3=3\times7-5=16$

$v_n=\dfrac{3n-1}{n^2+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

$v_1=\dfrac{3\times1-1}{1^2+1}=1$ $v_2=\dfrac{3\times2-1}{2^2+1}=1$ $v_3=\dfrac{3\times3-1}{3^2+1}=0{,}8$

$w_0=5$ et $w_{n+1}=4w_n-2n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Il faut faire attention à l'indice : $w_1=4\mathrm{w}_0-2\times0+1=21$ $w_2=4\times21-2\times1+1=83$

$w_3=4\times83-2\times2+1=329$

$a_1=2$ et $a_n=3a_{n-1}^2+2$ pour tout $n\geqslant1$

$a_2=3\mathrm{a}_1^2+2=3\times2^2+2=13$ $a_3=3\times13^2+2=509$

II- Le cas particulier des suites arithmétiques et géométriques (Première):

Ex2 : On considère la suite arithmétique w de premier terme $w_0=3$ et de raison 4

1. *La suite* (u_n) *vérifie* $u_1=5$ *et* $u_{n+1}=u_n-2$.

Exprimer u_n en fonction de n .

La suite est par définition arithmétique de raison -2 donc $u_n=u_1+r(n-1)=5-2(n-1)=7-2n$

2. *On sait que la suite* (u_n) *est arithmétique de raison* 3,2 *et que son premier terme est* $u_0=3$

Exprimer u_n en fonction de n . En déduire la valeur de n pour laquelle $u_n=191{,}8$.

$u_n=3+3{,}2n$ et on résout $3+3{,}2n=191{,}8\Leftrightarrow n=\dfrac{191{,}8-3}{3{,}2}=59$

3. *On considère la suite arithmétique w de premier terme* $w_0=3$ *et de raison* 4

a) Calculer w_{50}

b) En déduire la somme des 51 premiers termes de la suite

$w_{50}=3+4\times50=203$ et $w_0+w_1+...+w_{50}=\dfrac{w_{50}+w_0}{2}\times51=5253$

4*. On sait que la suite (a_n) est arithmétique de raison r , on sait aussi que $a_3=5$ et que $a_3+a_4+\ldots+a_{10}=124$

Retrouver r . (on pourra exprimer la somme en fonction de r et de a_3)

On sait que $a_n=a_3+r(n-3)=5+r(n-3)$ *et que*

$a_3+a_4+\ldots+a_{10}=124=\dfrac{a_{10}+a_3}{2}\times8=\dfrac{5+r\times7+5}{2}\times8=40+28r$ *donc* $r=\dfrac{124-40}{28}=10{,}5$

5- *La suite* (u_n) *est géométrique de terme initial* $u_0=3$ *et de raison* 2 . Calculer u_9 , puis donner l'expression de u_n en fonction de n .

$u_9=u_0\times2^9=1536$ et $u_n=u_0\times q^n=3\times2^n$

6- *La suite* (u_n) *vérifie* $u_1=10$ *et* $u_{n+1}=1{,}8\,u_n$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .

b) Exprimer u_n en fonction de n .

La suite est géométrique de raison 1,8 et de premier terme 10 (si on commence à n=1 ; 10 /1,8 si on commence à n=0) et $u_n=u_1\times q^{n-1}=10\times1{,}8^{n-1}$

Ex3: On note u_n le nombre défini par $u_1=6000$ et pour tout $n\geqslant1$ $u_{n+1}=1{,}05u_n-100$

1- Calculer u_2 et u_3 . La suite est-elle arithmétique? Géométrique?

$u_2=1{,}05\times6000-100=6200$ *et* $u_3=1{,}05\times6200-100=6410$ $u_2-u_1=200\neq210=u_3-u_2$ *donc la suite n'est pas arithmétique.* $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{31}{30}\neq\dfrac{641}{620}=\dfrac{u_3}{u_2}$ *donc elle n'est pas géométrique non plus.*

2- On définie la suite v par: $v_n=u_n-2000$ pour tout $n\geqslant1$

a- Montrer que la suite v est géométrique .

On cherche à établir que $v_{n+1}=qv_n$ *, or*

$v_{n+1}=u_{n+1}-2000=1{,}05u_n-100-2000=1{,}05(v_n+2000)-2100=1{,}05v_n+2100-2100=1{,}05v_n$ *en utilisant*

que $u_n=v_n+2000$ *.Elle est donc géométrique de raison 1,05*
b- En déduire v_n en fonction de *n* puis u_n en fonction de *n*.
$v_n=v_1\times1{,}05^{n-1}$ or $v_1=u_1-2000=4000$ donc $v_n=4000\times1{,}05^{n-1}$ et comme $u_n=v_n+2000$ on en déduit $u_n=2000+4000\times1{,}05^{n-1}$
c- En déduire la limite de la suite.
$\lim\limits_{x\to+\infty} q^n=+\infty\ si\ q>1\ donc\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1{,}05^{n-1}=+\infty$
et donc (u_n) tend aussi vers l'infini car 4000 est positif et on ajoute 2000 ce qui ne change rien.

III- <u>Le principe de la démonstration par récurrence (TS):</u>
<u>Ex 4:</u>
1- a-On considère la suite définie par $u_0=6$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=3u_n-8$
Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n=2\times3^n+4$
initialisation : $u_0=6$ *et* $2\times3^0+4=2+4=6$ *donc c'est vrai pour n=0*
hérédité : on montre que si pour un n quelconque $u_n=2\times3^n+4$ *alors* $u_{n+1}=2\times3^{n+1}+4$
On sait que $u_{n+1}=3u_n-8$ *par définition donc* $u_{n+1}=3(2\times3^n+4)-8$ *par hypothèse de récurrence ce qui donne* $u_{n+1}=2\times3^{n+1}+12-8$ *soit* $u_{n+1}=2\times3^{n+1}+4$ *ce qui clôt la récurrence*
b- En déduire la limite de la suite.
$\lim\limits_{x\to+\infty} q^n=+\infty\ si\ q>1\ donc\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3^n=+\infty$ *Et donc comme on multiplie par 2>0 et qu'on ajoute 4 ce qui ne changera rien, la suite u diverge vers* $+\infty$

2-On considère la suite définie par $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=\dfrac{n+u_n}{n+1}$
a- Calculer les premiers termes u_1 , u_2 , u_3
$u_1=\dfrac{0+u_0}{0+1}=2$ $u_2=\dfrac{1+u_1}{1+1}=\dfrac{3}{2}=1{,}5$ $u_3=\dfrac{2+1{,}5}{2+1}=\dfrac{7}{6}$
b- Montrer par récurrence que pour tout $n\geqslant1$ on a $1\leqslant u_n\leqslant1+\dfrac{1}{n}$
initialisation : $u_1=2$ *et* $1+\dfrac{1}{1}=2$ *donc on a bien* $1\leqslant u_n\leqslant1+\dfrac{1}{n}$ *pour n=1*
hérédité : On montre que si $1\leqslant u_n\leqslant1+\dfrac{1}{n}$ *alors* $1\leqslant u_{n+1}\leqslant1+\dfrac{1}{n+1}$
On part de l'hypothèse de récurrence : $1\leqslant u_n\leqslant1+\dfrac{1}{n}$ *donc* $n+1\leqslant n+u_n\leqslant n+1+\dfrac{1}{n}$ *en ajoutant partout n, le but étant de récupérer* $u_{n+1}=\dfrac{n+u_n}{n+1}$ *puis en divisant le tout par n+1 qui est positif (donc on conserve l'ordre on obtient :*
$$1\leqslant u_{n+1}=\frac{n+u_n}{n+1}\leqslant\frac{n+1+\frac{1}{n}}{n+1}=1+\frac{1}{n(n+1)}\leqslant1+\frac{1}{n+1}$$
car n(n+1) est supérieur à n+1 puisque n est positif. Ce qui clôt la récurrence.

c- En déduire la limite de la suite.
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n}=1$ *et donc le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite u converge vers 1 puisqu'elle est encadrée par deux suites qui convergent vers 1.*
<u>IV- Calculs de limites (TS):</u>
<u>Ex5</u> :
1- On considère la suite définie par $u_0=-8$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$
a- Montrez par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant4$
initialisation : $u_0=-8$ *et* $u_1=\sqrt{12-8}=2$ *donc* $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant4$ *our n=0*
hérédité : On montre que si $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant4$ *alors* $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant4$
On part de l'hypothèse de récurrence : $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant4$ *et on ajoute 12 à chaque terme puis on applique la racine carrée à chaque terme ce qui est possible car ils sont positif (il aurait fallu le justifier pour être*

rigoureux) et comme la fonction racine carrée est croissante on garde l'ordre, ça donne :
$u_n+12 \leqslant u_{n+1}+12 \leqslant 16$ *puis* $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \sqrt{16}=4$
Ce qui clôt la récurrence.
b- En déduire que la suite est convergente.
On vient d'établir que la suite est croissante car $u_n \leqslant u_{n+1}$ *pour tout n et majorée par 4. Elle converge donc.*
c- Déterminez sa limite.
On note L sa limite, on sait que (u_n) *et* (u_{n+1}) *ont pour limite L, mais* $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$ *donc en utilisant la limite d'une composée on trouve que* (u_{n+1}) *doit tendre vers* $\sqrt{12+L}$.
La limite étant unique on a $L=\sqrt{12+L} \Rightarrow L^2=12+L \Rightarrow L^2-L-12=0$ *polynôme de degré 2 dont les racines sont 4 et -3, mais -3 est impossible puisque* $u_1=2$ *et que la suite est croissante. La limite est donc 4.*

2- Déterminer la limite de la suite définie par $u_n=\dfrac{3n^2-5}{n^2+1}$

On factorise par n² : $u_n=\dfrac{3n^2-5}{n^2+1}=\dfrac{n^2\left(3-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ *soit* $u_n=\dfrac{\left(3-\frac{5}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ *et on justifie que le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1 donc la suite converge vers 3.*

3-Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n+n(3n+1)$
a- Montrer que la suite est croissante
$u_{n+1}-u_n=n(3n+1) \geqslant 0$ *car n est positif. Donc la suite est bien croissante*
b- En déduire qu'elle est positive, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geqslant n-1$
Le premier terme est 0 et la suite est croissante, donc elle est positive, on en déduit
$u_{n+1}=u_n+n(3n+1) \geqslant n(3n+1) \geqslant n \geqslant n-1$ *puisque* $3n+1 \geqslant 1$
c- En déduire sa limite.
$\lim\limits_{x \to +\infty} n-1=+\infty$ *Donc par comparaison la suite u diverge aussi vers* $+\infty$.