Soutien séance 4 : Les suites

I- Modes de définition(Première) :

Il ne faut pas confondre des suites définies par une formule explicite, c.a.d directement en fonction de n , des suites définies par récurrence , c.a.d en fonction des termes précédents.

Ex1 : Pour chacune des suites ci-dessous calculer les termes de rang 1, 2 et 3.

$u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=3u_n-5$

$v_n=\dfrac{3n-1}{n^2+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

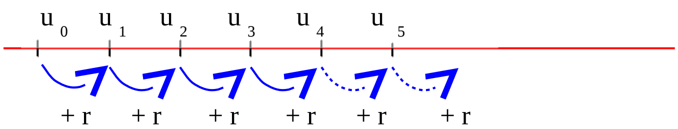
$w_0=5$ et $w_{n+1}=4w_n-2n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

$a_1=2$ et $a_n=3a_{n-1}^2+2$ pour tout $n\geqslant 1$

II- Le cas particulier des suites arithmétiques et géométriques (Première):

<table>
<tr>
<td>

Suites arithmétiques:



Définition: Par un premier terme et pour tout n :
$u_{n+1}=u_n+r$ (et donc si pour tout n $u_{n+1}-u_n$ est constant, alors la suite est arithmétique ; c'est comme ça qu'on le prouve)

Formule explicite: $u_n=u_0+n\times r$ ou si on commence à n=1 par exemple : $u_n=u_1+(n-1)\times r$

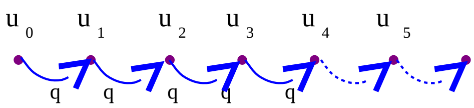
somme de termes consécutifs:
$\dfrac{premier\ terme+dernier\ terme}{2}\times nombre\ de\ terme$

en particulier: $1+2+...+n=\dfrac{(n+1)\times n}{2}$

limites :
Si r>0 la suite est croissante et diverge vers $+\infty$
Si r<0 la suite est décroissante et diverge vers $-\infty$

</td>
<td>

Suites géométriques:



Définition: Par un premier terme et pour tout n :
$u_{n+1}=q\times u_n$ (et donc si pour tout n $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, alors la suite est géométrique ; c'est comme ça qu'on le prouve)

Formule explicite: $u_n=u_0\times q^n$ ou si on commence à n=1 par exemple : $u_n=u_1\times q^{(n-1)}$

somme de termes consécutifs:(avec $q\neq 1$)
$premier\ terme\times\dfrac{1-raison^{nombre\,de\ terme}}{1-raison}$

en particulier: $1+q+q^2+...+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

limites :
On utilise $u_n=u_0\times q^n$ et le fait que
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ si q>1
et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ si -1<q<1

</td>
</tr>
</table>

Ex2 : On considère la suite arithmétique w de premier terme w_0=3 et de raison 4

1. *La suite* (u_n) *vérifie* u_1 = 5 *et* u_{n+1} = u_n - 2 .
Exprimer u_n en fonction de n .

2. *On sait que la suite* (u_n) *est arithmétique de raison* 3,2 *et que son premier terme est* u_0 = 3
Exprimer u_n en fonction de n . En déduire la valeur de n pour laquelle u_n = 191,8 .

3. *On considère la suite arithmétique w de premier terme* w_0 = 3 *et de raison* 4
   a) Calculer w_{50}
   b) En déduire la somme des 51 premiers termes de la suite

4*. On sait que la suite (a_n) est arithmétique de raison r , on sait aussi que a_3 = 5 et que $a_3+a_4+\ldots+a_{10}=124$
Retrouver r . (on pourra exprimer la somme en fonction de r et de a_3)

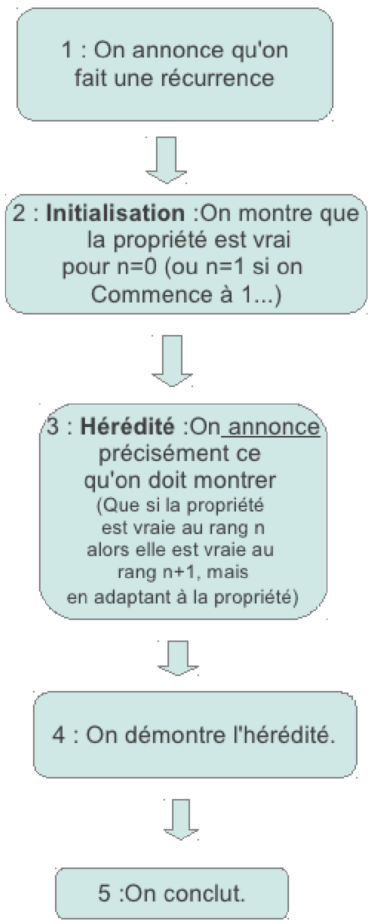
5- *La suite* (u_n) *est géométrique de terme initial* u_0 = 3 *et de raison* 2 . Calculer u_9 , puis donner l'expression de u_n en fonction de n .

6- *La suite* (u_n) *vérifie* u_1 = 10 *et* u_{n+1} = 1,8 u_n .
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
   b) Exprimer u_n en fonction de n .

Ex3: On note u_n le nombre défini par $u_1=6000$ et pour tout $n\geqslant 1$ $u_{n+1}=1{,}05u_n-100$

1- Calculer u_2 et u_3 . La suite est-elle arithmétique? Géométrique?
2- On définie la suite *v* par: $v_n = u_n - 2000$ pour tout $n \geqslant 1$
a- Montrer que la suite *v* est géométrique .
b- En déduire v_n en fonction de *n* puis u_n en fonction de *n*.
c- En déduire la limite de la suite.

III- <u>Le principe de la démonstration par récurrence (TS):</u>



Il y a deux grandes étapes (plus trois de rédaction) : On montre qu'une propriété est vraie pour le premier rang (initialisation) puis qu'elle se transmet d'un nombre (quelconque) au suivant (ce qui n'est possible qu'avec des nombres entiers : $n \in \mathbb{N}$) et donc on peut conclure qu'elle est toujours vraie.
Ex 4:
1- a-On considère la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 3u_n - 8$
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 2 \times 3^n + 4$
b- En déduire la limite de la suite.
2-On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n+1}$$

a- Calculer les premiers termes u_1 , u_2 , u_3
b- Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$ on a $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$
c- En déduire la limite de la suite.

<u>IV- Calculs de limites (TS):</u>
On peut utiliser les techniques vues sur les fonctions (dans le cas où la suite est définie par une formule explicite), la limite de q^n pour les suites géométriques (voir Ex3.2 .c et Ex 4.1.b)ou les théorèmes de comparaison et d'encadrement (voir Ex4.2.c,Ex5.3.c), mais aussi une technique spécifique aux suites (Ex5.1) :
Toute suite croissante majorée converge et ***toute suite décroissante minorée converge.***
Par contre ces résultats ne donnent pas la limite qu'il faut alors calculer grâce à une équation, en utilisant le fait que les suites (u_n) et (u_{n+1}) ont la même limite, et donc si $u_{n+1} = f(u_n)$ on peut en déduire que la limite *L* vérifie $L = f(L)$
<u>Ex5</u> :
1- On considère la suite définie par $u_0 = -8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$
a- Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
b- En déduire que la suite est convergente.
c- Déterminez sa limite.
2- Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \frac{3n^2 - 5}{n^2 + 1}$
3-Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + n(3n+1)$
a- Montrer que la suite est croissante
b- En déduire qu'elle est positive, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geqslant n - 1$
c- En déduire sa limite.