Révisions

EXERCICE 1

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = \dfrac{9-2u_n}{4-u_n}$.

On se propose de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de déterminer sa limite au moyen de deux méthodes différentes .

On admet que, pour tout entier naturel n , $1 \leqslant u_n \leqslant 4$.

1. Première méthode

a) Vérifier que, pour tout $x \neq 4$, $\dfrac{9-2x}{4-x} = 2 + \dfrac{1}{4-x}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3 .

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-3)^2}{4-u_n}$.

c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ .

d) Montrer que ℓ vérifier $\ell^2 - 6\ell + 9 = 0$ et déterminer sa valeur.

2. Deuxième méthode

On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n-5}{u_n-3}$.

a) Montrer que , pour tout entier n , $v_{n+1} = \dfrac{3u_n-11}{u_n-3}$.

En déduire que $v_{n+1} - v_n$ est indépendant de n . Que peut-on en conclure concernant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Donner l'expression de v_n en fonction de n .

c) On admet que , pour tout entier n , $u_n = \dfrac{3v_n-5}{v_n-1}$.

Déterminer l'expression u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 2

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00.
Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.
Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4% des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5% des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

EXERCICE 3

On note f la fonction définie sur $[-6 ; 4]$ par $f(x) = x^4 - 24x^2 + 72x$.

1. g est la fonction définie sur $[-6 ; 4]$ par $g(x) = x^3 - 12x + 18$ et dont un tableau de valeurs est donné ci-dessous :

Valeurs de x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Valeurs de $g(x)$	-126	-47	2	27	34	29	18	7	2	9	34

a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[-6 ; 4]$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique que l'on notera α dans $[-6 ; 4]$.

c) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α .

2. Compléter le tableau de signes de $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$\cdots$	0	$\cdots$	

3. Vérifier que , pour tout réel x , $f'(x) = 4g(x)$.

En déduire le sens de variation de la fonction f . Le tableau de variation complet n'est pas demandé .

EXERCICE 4

1. Pour tout complexe z , on note $P(z) = z^3 - 2(1+\mathrm{i})z^2 + 4(1+\mathrm{i}) - 8\mathrm{i}$.

  a) Montrer que , pour tout z , $P(z) = (z - 2\mathrm{i})(z^2 - 2z + 4)$.

  b) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2. Déterminer la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3. On note $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Montrer que a^6 est un nombre réel.

EXERCICE 5

On considère quatre points A , B , C et D non coplanaires .
On note I , J , K et G les points définis par :

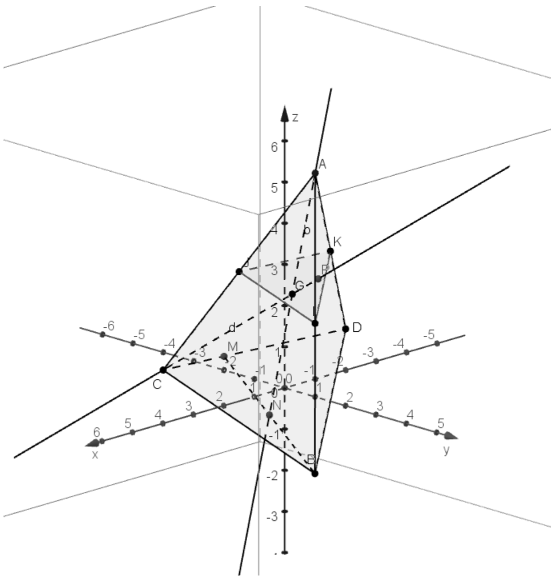
- I milieu du segment $[AB]$;
- J milieu du segment $[AC]$;
- K milieu du segment $[AD]$;
- $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$

1. Montrer que $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$.

2. Donner les expressions des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
En déduire que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ} + \frac{1}{6}\overrightarrow{IK}$.
Qu'en déduire pour les points G , I , J et K ?

Partie B

L'espace est rapporté à une repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On suppose dorénavant que les points A , B , C et D ont pour coordonnées respectives : $(-1\,;\,0\,;\,5)$, $(2\,;\,3\,;\,1)$, $(1\,;\,-3\,;\,0)$ et $(-2\,;\,0\,;\,1)$.



1. On note M le point défini par $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$; N le milieu de $[BM]$ et L le milieu de $[AN]$.
Déterminer les coordonnées de M , puis celles de N .
En déduire que le point L a pour coordonnées $\left(0; \frac{1}{4}; \frac{7}{3}\right)$.

2. On note P le point de coordonnées $(-0{,}2\,;\,0{,}9\,;\,2{,}8)$.

  a) Montrer que A , B , D et P sont coplanaires .

  b) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CL) est $\begin{cases} x = & -23 - 12t \\ y = & 75 + 39t \\ z = & 56 + 28t \end{cases}$,avec $k \in \mathbb{R}$.

  Établir que P est le point d'intersection de la droite (CL) et du plan (ABD) .