ROUEN

Premier exercice

Toutes séries

Retouche d'images

Énoncé

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du noir au blanc en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un nombre réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le noir ;
- $x = 1$ pour le blanc ;
- x varie de 0 à 1 pour toutes les nuances de gris intermédiaires (du foncé au clair).

L'image A, ci-dessous, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « **fonctions de retouche** ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède au moins les trois propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Une **nuance codée** x_0 est dite :

- assombrie par la fonction f si $f(x_0) \leqslant x_0$;
- éclaircie par la fonction f si $f(x_0) \geqslant x_0$.

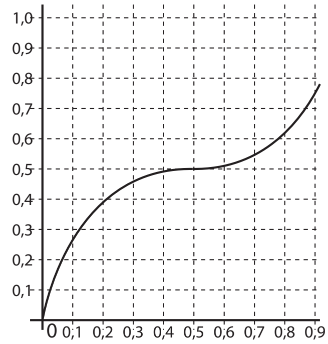
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$.
L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$.
L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

Image A

Image B

Image C

Partie A



1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$. Sa courbe représentative est donnée ci-contre.
   a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
   b) À l'aide du graphique, quelles sont les nuances codées x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ qui seront assombries par la fonction f_1 ?
   c) Résoudre par le calcul l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$.
2. a) Proposer une fonction de retouche f_2 définie sur $[0\,;\,1]$ éclaircissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   b) Proposer une fonction de retouche f_3 définie sur $[0\,;\,1]$ assombrissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie B

1. On considère une fonction polynôme du second degré g_1 définie sur $[0\,;\,1]$ vérifiant $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.
   Sachant que g_1 est une fonction de retouche, justifier qu'elle est définie sur $[0\,;\,1]$ par :
$$g(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x.$$
2. On cherche maintenant une fonction de retouche g_2 définie sur $[0\,;\,1]$ qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permettrait de revenir aux nuances initiales.
   a) Donner les valeurs de $g_2(0), g_2(1)$ et $g_2\left(\frac{2}{3}\right)$.
   b) Calculer $g_2\left(\frac{1}{6}\right)$
   c) Résoudre l'équation de la variable x, $g_1(x) = y$, avec $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$.
   En déduire l'expression de la fonction de retouche g_2 qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permet de revenir aux nuances initiales.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Deuxième exercice

Série S

À la recherche du triangle d'or

Énoncé

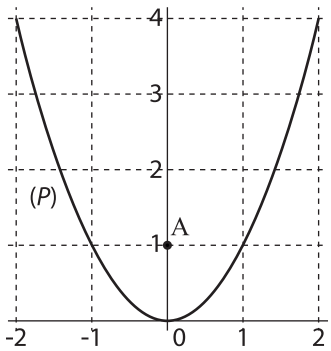
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on note (P) la parabole d'équation $y = x^2$ et on appelle A le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

On s'intéresse, dans cet exercice, aux triangles AMM', où M et M' sont deux points de la parabole (P). L'objectif est de déterminer tous les couples de points M et M' appartenant à (P) pour lesquels le triangle **AMM' soit isocèle rectangle en A.**

Partie A - Quelques exemples

a) Représenter sur le graphique ci-contre deux exemples simples de triangles AMM', symétriques, qui satisfont le problème (aucune justification n'est attendue).

b) Vérifier que les points $M\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $M'\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ appartiennent à (P) et forment un couple de points également solution au problème.



Partie B - Avec un cercle

On considère le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon r (avec $r > 0$).

Ci-dessous le cercle $(\mathscr{C})$ a été représenté dans le même repère que la parabole $y = x^2$ pour cinq valeurs particulières de r.

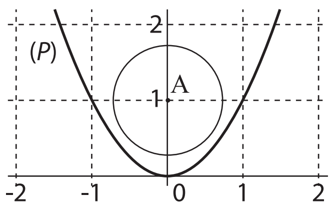


Figure 1

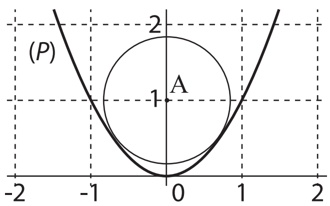


Figure 2

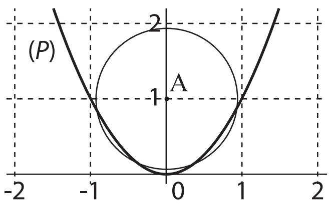


Figure 3

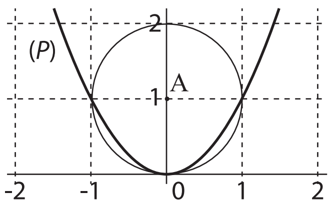


Figure 4

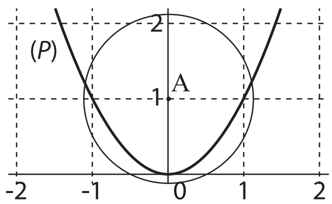


Figure 5

1. Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.
   Démontrer que M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si $x^2 + y^2 - 2y + 1 = r^2$.

2. En déduire que $M(x; y)$ appartient à la fois au cercle $(\mathscr{C})$ et à la parabole (P) si et seulement si $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - y + 1 - r^2 = 0 \end{cases}$

3. Expliquer en quoi la résolution de ce système contribue à la résolution du problème initialement présenté.
4. a) Déterminer, selon la valeur de r, le nombre de solutions de l'équation : $y^2 - y + 1 - r^2 = 0$

   b) À quel graphique ci-dessus le cas « $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ » correspond-il ?
5. On suppose dans la suite que : $r \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) Soient M$(x;y)$ et M'$(x';y')$ deux points appartenant à la fois à $(\mathscr{C})$ et à (P) et **symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**.
   Justifier que si le triangle AMM' est rectangle en A alors $y^2 - 3y + 1 = 0$.

   b) À l'aide des représentations graphiques ci-dessus, et en raisonnant selon la valeur de r, terminer la résolution du problème, c'est-à-dire, déterminer tous les couples de points M et M' appartenant à (P) pour lesquels le triangle **AMM' est isocèle rectangle en A**.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Troisième exercice

Séries autres que S

Un aller-retour harmonique

Énoncé

Nous nous intéressons à une compétition sportive où les participants doivent enchaîner deux disciplines : la course à pied et le vélo.
Le parcours consiste en un aller-retour entre deux villes, l'aller s'effectuant à pied, en courant et le retour à vélo.
Nous allons étudier plus particulièrement la course de deux participantes : Lou et Anna.

1. **Comparaisons**
   Lou couvre habituellement la distance aller à la vitesse moyenne de 15 km/h et le retour à la vitesse moyenne de 35 km/h.
   a) Calculer la durée totale du trajet aller-retour de Lou en fonction de la distance d qui sépare les deux villes.
   b) À l'entrainement, Anna effectue le trajet aller-retour à la vitesse moyenne de 20 km/h.
   Entre Lou et Anna, laquelle réalise la meilleure performance ?
2. **Performances**
   Afin de progresser, Anna veut augmenter sa vitesse moyenne sur l'aller-retour. Elle sait cependant qu'en course à pied, elle ne peut pas faire mieux que 15 km/h. Elle est donc consciente qu'il lui faut augmenter sa vitesse à vélo.
   Notons x sa vitesse moyenne sur le retour à vélo et $v(x)$ sa vitesse moyenne sur l'aller-retour (toutes deux exprimées en km/h).
   a) Démontrer que si Anna optimise sa course à pied $v(x) = \dfrac{30x}{15+x}$.
   b) À quelle vitesse Anna doit-elle rouler sur le retour pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 22 km/h ?
   c) Démontrer que, quelle que soit la vitesse moyenne d'Anna sur le retour à vélo, sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ne pourra jamais dépasser 30 km/h.

RETOUR AU SOMMAIRE