ROUEN

Premier exercice

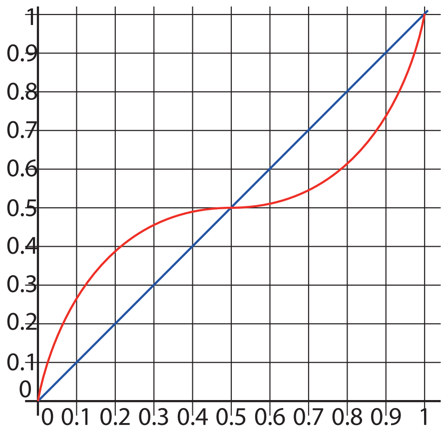
Toutes séries

Retouche d'images

Éléments de solution

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$. Sa courbe représentative est donnée ci-contre.



   a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
   $f_1(0) = 0\,;\, f_1(1) = 1$.
   De plus f_1 est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(2x-1)^2$.
   $f_1'(x) \geqslant 0$,pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   f_1 est donc croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   La fonction f_1 est donc une fonction de retouche.

   b) À l'aide du graphique, les nuances codées x appartenant à l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$ seront assombries par la fonction f_1.

   c) Pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f_1(x) \leqslant x$ équivaut à : $4x^3 - 6x^2 + 3x \leqslant x$
   $2x(2x^2 - 3x + 1) \leqslant 0$
   $2x(2x-1)(x-1) \leqslant 0$
   Or $x \in [0;1]$ donc $f_1(x) \leqslant x$ équivaut à : $2x - 1 \geqslant 0$, c'est–à–dire $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$].
   Conclusion : $S = \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

2. a) Exemple de fonction de retouche f_2 définie sur $[0\,;\,1]$ éclaircissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$: $f_2(x) = \sqrt{x}$.

   b) Exemple de fonction de retouche f_3 définie sur $[0\,;\,1]$ assombrissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$: $f_3(x) = x^2$.

Partie B

1. g_1 est une fonction polynôme du second degré donc $g_1(x) = ax^2 + bx + c$, avec x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$. g_1 est une fonction de retouche, donc $g_1(0) = 0$ et $g?_1(1) = 1$.
   Ceci se traduit par $c = 0$ et $a + b = 1$
   . Donc $g_1(x) = ax^2 + (1-a)x$.
   De plus $g_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$.
   Par conséquent $\dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}(1-a) = \dfrac{2}{3}$ c'est-à-dire $a = -\dfrac{2}{3}$.
   Donc g_1 est définie sur $[0\,;\,1]$ par : $g_1(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x$.

2. On cherche maintenant une fonction de retouche g_2 définie sur $[0\,;\,1]$ qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permettrait de revenir aux nuances initiales.

a) $g_2(0) = 0, g_2(1 = 1)$ et $g_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

b) $g_2\left(\frac{1}{6}\right)$ équivaut à $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{1}{6}$
ou encore : $4x^2 - 10x + 1 = 0$. $\Delta = 84$.
Deux solutions : $\frac{5-\sqrt{21}}{4}$ et $\frac{5+\sqrt{21}}{4}$, mais seule la première appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par conséquent $g_2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5-\sqrt{21}}{4}$.

c) Pour $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$:
$g_1(x) = y$ équivaut à $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = y$.
ou encore : $2x^2 - 5x + 3y = 0$. $\Delta = 25 - 24y$.
Comme $y \in [0;1]$, $\Delta > 0$.
Donc deux solutions : $\frac{5-\sqrt{25-4y}}{4}$)/4 et $\frac{5+\sqrt{25-4y}}{4}$, mais seule la première appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On en déduit l'expression de la fonction de retouche g_2 qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permet de revenir aux nuances initiales :
$g_2(x) = \frac{5-\sqrt{25-4y}}{4}$ et on peut vérifier que c'est bien une fonction de retouche.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

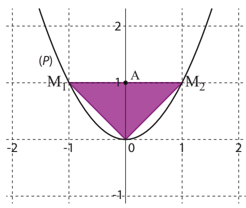
Deuxième exercice

Série S

À la recherche du triangle d'or

Éléments de solution

Partie A - Quelques exemples



a) Voir ci-contre.

b) On vérifie que $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ pour justifier l'appartenance à (P).

Partie B - Avec un cercle

1. Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point quelconque du plan.
M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $AM^2 = r^2$. Autrement dit : M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $x^2+(y-1)^2 = r^2$
M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $x^2+y^2-2y+1 = r^2$.
2. $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à la fois au cercle $\mathscr{C}$ et à la parabole (P) si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ x^2+y^2-2y+1 & = & r^2) \end{array}\right.$$

Autrement dit $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à la fois au cercle $\mathscr{C}$ et à la parabole (P) si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ y^2-y+1-r^2 & = & 0) \end{array}\right.$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les coordonnées des points M et M' sur la parabole (P) tels que AMM' soit isocèle.
3. a) et b) On considère l'équation : $y^2-y+1-r^2=0$; $\Delta = 4r^2-3$.
Si $r < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (figure 1), pas de solution.

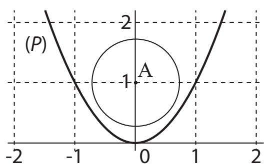


Figure 1

Si $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (figure 2), une unique solution : $y = \dfrac{1}{2}$.

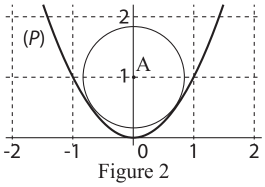


Figure 2

Si $r > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (figures 3, 4, 5) deux solutions envisageables données par $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{4r^2 - 3}}{2}$. L'étude du signe de ces solutions amènera à distinguer les cas $r \leqslant 1$ et $r > 1$.

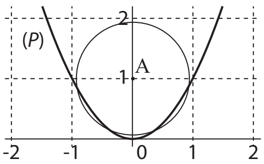


Figure 3

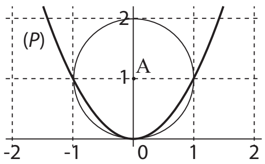


Figure 4

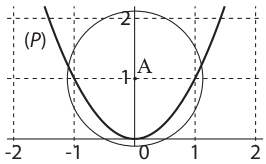


Figure 5

4. **Cas général : on suppose dans la suite que** : $r \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) M(x ; y), M'(x' ; y') appartiennent à la fois à $\mathscr{C}$ et (P) et sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On a donc les relations : $y = x^2$, $y' = x?^2$, $y = y'$ et $x = -x'$.
   Le théorème de Pythagore ou le produit scalaire permettent d'obtenir l'égalité souhaitée :$y^2 - 3y + 1 = 0$.

   b) Si $\boldsymbol{r} > \mathbf{1}$, alors l'équation $y^2 - y + 1 - r^2 = 0$ possède une unique solution positive : $y = \dfrac{1 + \sqrt{4r^2 - 3}}{2}$.
   La résolution de l'équation $y = x^2$ donnera deux solutions opposées pour x, soient deux points M et M' qui vérifient les conditions de la question 5.a. et après résolution de l'équation du second degré $y^2 - 3y + 1 = 0$, on obtient $y = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et donc $x = \pm\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
   Réciproquement, on sait que cette solution convient d'après la Partie A. b.

   Si $\boldsymbol{r}= 1$, la résolution du système de la question 2 donne trois points solutions $M_1(0\,;0)$, $M_2(1\,;1)$ et $M_3(-1\,;1)$ qui correspondent aux deux triangles de la partie A. a. (figure 4)

   Si $r \in \left]\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ 1\right[$, alors $\Delta > 0$ et $\sqrt{4r^2 - 3} \leqslant 1$ donc l'équation $y^2 - y + 1 - r^2 = 0$ possède deux solutions y strictement positives donnant chacune deux valeurs opposées pour x.
   On vérifie (Pythagore, considérations géométriques,. . .) qu'aucun des quatre triangles ne convient.

   Enfin, si $\boldsymbol{r}= \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$, alors $y = \dfrac{1}{2}$ et $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On vérifie que le triangle AMM' avec M $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et M' $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2})$ convient (figure 2).

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Troisième exercice

Séries autres que S

Un aller-retour harmonique

Énoncé

Nous nous intéressons à une compétition sportive où les participants doivent enchaîner deux disciplines : la course à pied et le vélo.
Le parcours consiste en un aller-retour entre deux villes, l'aller s'effectuant à pied, en courant et le retour à vélo.
Nous allons étudier plus particulièrement la course de deux participantes : Lou et Anna.

1. **Comparaisons**
   Lou couvre habituellement la distance aller à la vitesse moyenne de 15 km/h et le retour à la vitesse moyenne de 35 km/h.
   a) Calculer la durée totale du trajet aller-retour de Lou en fonction de la distance d qui sépare les deux villes.
   b) À l'entrainement, Anna effectue le trajet aller-retour à la vitesse moyenne de 20 km/h.
   Entre Lou et Anna, laquelle réalise la meilleure performance ?
2. **Performances**
   Afin de progresser, Anna veut augmenter sa vitesse moyenne sur l'aller-retour. Elle sait cependant qu'en course à pied, elle ne peut pas faire mieux que 15 km/h. Elle est donc consciente qu'il lui faut augmenter sa vitesse à vélo.
   Notons x sa vitesse moyenne sur le retour à vélo et $v(x)$ sa vitesse moyenne sur l'aller-retour (toutes deux exprimées en km/h).
   a) Démontrer que si Anna optimise sa course à pied $v(x) = \dfrac{30x}{15+x}$.
   b) À quelle vitesse Anna doit-elle rouler sur le retour pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 22 km/h ?
   c) Démontrer que, quelle que soit la vitesse moyenne d'Anna sur le retour à vélo, sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ne pourra jamais dépasser 30 km/h.

RETOUR AU SOMMAIRE