Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Premier exercice national

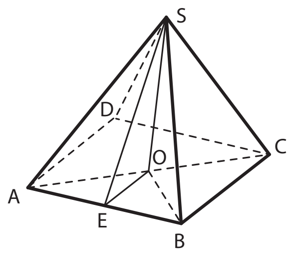
Toutes séries

Échanges thermiques

Éléments de solution

1. a) ,b), c) Calculs de compacité

	Cube de côté a	Demi-sphère de rayon r	Pyramide à base carrée de côté a, de hauteur a
Surface extérieure	$6a^2$	$3\pi r^2$	$a^2(\sqrt{5}+1)$
Volume	a^3	$\frac{3}{2}\pi r^3$	$\frac{1}{3}a^3$
Facteur de compacité	$\frac{6}{a}$	$\frac{9}{2r}$	$\frac{3(\sqrt{5}+1)}{a}$



Le calcul de la surface extérieure demande celui de la hauteur SE qui est l'hypoténuse de SOE, rectangle en O

   d) Les échanges thermiques avec l'extérieur sont d'autant plus grands que le facteur de compacité est élevé.
   Note : Le facteur de compacité est également pris en compte pour analyser les coûts de packaging, de stockage ou de transport d'une marchandise.

2. a) On développe le second membre...
   b) Le second membre est un nombre positif, donc le premier aussi.
   c) L'inégalité précédente, valable pour tout triplet (a,b,c), s'applique à tout triplet de produit 1, et aux racines cubiques...
   d),e) Le volume d'un tel pavé est xyz et sa surface extérieure $2(xy+yz+zx)$, d'où le résultat.
   Comme $xyz=1$, l'inégalité précédente s'applique au triplet $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ dont le produit vaut aussi 1, d'où il résulte que $c \geqslant 6$. Et comme ce minorant est atteint en (1, 1, 1), c'est un minimum. Le cube de côté 1 réalise le minimum du facteur de compacité des pavés de volume 1. Aucun autre pavé droit de volume 1 de le réalise : l'inégalité 2. b. serait stricte.

3. a) Faire $c=1$ pour obtenir l'équation proposée.
   b) Comme $p \leqslant q \leqslant r$, la somme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ est majorée par $\frac{3}{p}$, qui est donc supérieur à $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, si $p \leqslant 2$, la somme des trois fractions unitaires est supérieure strictement à $\frac{1}{2}$.
   c) et d) Comme précédemment, si $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{6}, \frac{2}{q} \geqslant \frac{1}{6}$. D'autres majorations s'imposent dans les cas qui suivent.
   Tableau final. On lit les triplets solutions en colonne.

p	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	6
$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
q	7	8	9	10	11	12	5	6	7	8	6	6
r	42	24	18	15		12	20	12		8		6

Compléments et commentaires de Max Hochart [1]

0.1 Sur la question 2a)

Les remarques a) et b) ci-dessous sont directement exploitables en classe de terminale, la c) est passablement hors programme, mais la remarque d) peut faire l'objet d'un développement historiquement important : la résolution des équations de degré 3.

a) La question 2a de ce sujet demande d'établir la relation suivante :

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2], \tag{1}$$

valable (selon l'énoncé) « pour tous nombres a,b,c ». On peut choisir a,b,c complexes. En notant

$$\sigma_1 = a+b+c,$$

$$\sigma_2 = ab+ac+bc$$

et

$$\sigma_3 = abc,$$

les trois complexes a,b,c sont les racines du polynôme

$$(X-a)(X-b)(X-c).$$

En développant, ce polynôme vaut

$$X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3.$$

Autrement dit, en notant z_1,z_2,z_3 au lieu de a,b,c, on a les relations

$$z_i^3 = \sigma_1 z_i^2 - \sigma_2 z_i + \sigma_3$$

pour $i \in \{1,2,3\}$. En sommant ces trois relations, on obtient

$$a^3+b^3+c^3 = \sigma_1(a^2+b^2+c^2)-\sigma_2(a+b+c)+3\sigma_3,$$

soit encore

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc), \tag{2}$$

ce qui donne la relation voulue puisque

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

b) La relation (1) est un cas particulier des identités de Newton. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$, on considère les polynômes symétriques élémentaires

$$\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} z_{i_1}\cdots z_{i_k}.$$

On introduit également les sommes des puissances des z_i : pour $p \in$
mathbbN,

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} z_k^p.$$

1. Responsable de la rubrique des problèmes de l'APMEP

En convenant que $\sigma_0 = 1$, on a alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1}\ \sigma_{k-i}\ S_i.$$

En prenant $n = k = 3$, on a donc

$$3\sigma_3 = \sigma_2\ S_1 - \sigma_1\ S_2 + S_3.$$

Ceci redonne

$$S_3 - 3\sigma_3 = \sigma_1(S_2 - \sigma_2),$$

qui est la relation (2).

c) Une autre approche possible est de passer par les complexes. En notant j le nombre complexe

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right),$$

on a clairement $j + j^2 = -1$ et il s'agit de montrer que

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc), \tag{3}$$

ce qui peut se faire en développant.

Mais la formule (3) est relativement naturelle : elle provient du calcul du déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. L'expression $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ s'obtient en développant le déterminant par la règle de Sarrus, tandis que l'expression $(a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$ s'obtient en diagonalisant la matrice. En effet, en notant $V_1 = (1,1,1)$, $V_2 = (1,j,j^2)$ et $V_3 = (1,j^2,j)$, on a $AV_1 = (a+b+c)V_1$, $AV_2 = (a+jb+j^2c)V_2$ et $AV_3 = (a+j^2b+jc)V_3$. Le déterminant de A est donc le produit des valeurs propres, à savoir $(a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$.

d) Fait remarquable, la relation (3) permet de résoudre les équations de degré 3, en dissimulant l'aspect technique de la méthode de Cardan. Une équation de degré 3 peut toujours s'écrire sous la forme

$$X^3 + pX + q = 0.$$

On sait alors résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$b^3 + c^3 = q, \quad bc = -\frac{p}{3}.$$

En effet, $B = b^3$ et $C = c^3$ vérifient

$$B + C = q, \quad BC = -\frac{p^3}{27},$$

donc B et C sont les racines de l'équation

$$X^2 - qX - \frac{p^3}{27} = 0.$$

On en déduit B et C puis b et c. La relation (3) donne alors

$$X^3 + pX + q = X^3 - 3bcX + b^3 + c^3 = (X+b+c)(X+jb+j^2c)(X+j^2b+c).$$

Le polynôme de degré 3 est maintenant factorisé et l'on peut trouver ses racines facilement.

0.2 Sur la question 2b)

Il s'agit de démontrer que, pour $A,B,C > 0$, si $ABC = 1$ alors $A+B+C \geqslant 3$. Ceci est un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique : pour $x_1, \cdots, x_n > 0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

En prenant $n = 3$, $x_1 = A, x_2 = B, x_3 = C$, on a la solution à l'exercice :

$$\frac{1}{3}(A+B+C) \geqslant ABC = 1.$$

L'inégalité arithmético-géométrique se prouve généralement par la concavité de la fonction logarithme, argument hors programme avant le baccalauréat.

Cependant, deux approches sont possibles en classe de Terminale. La première est une démonstration par récurrence, assez subtile : on commence par le cas où n est une puissance de 2, puis une petite astuce permet de conclure. Cette preuve historique est due à Cauchy. Très jolie, cette preuve n'en demeure pas moins mystérieuse et peu formatrice pour les élèves. La voici, selon les termes de Cauchy (extraits des Oeuvres complètes de Cauchy, publiées en 1897 chez Gauthier-Villars) :

La moyenne géométrique entre plusieurs nombres $A, B, C, D, \ldots$ est toujours inférieure Ĺ leur moyenne arithmétique.

Démonstration - Soit n le nombre des lettres $A, B, C, \ldots$ Il suffira de prouver, qu'on a généralement

$$\sqrt[n]{ABCD\ldots} \leq \frac{A+B+C+D+\ldots}{n}, \tag{4}$$

ou, ce qui revient au mŘme,

$$ABCD\ldots \leq \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n. \tag{5}$$

Or en premier lieu, on aura évidemment, pour $n = 2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2,$$

et l'on conclura, en prenant successivement $n = 4, n = 8, \ldots$, enfin $n = 2^m$

$$\begin{aligned} ABCD &\leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2\left(\frac{C+D}{2}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ABCDEFGH &\leq \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4\left(\frac{E+F+G+G}{4}\right)^4 \\ &\leq \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$ABCD\ldots. \leq \left(\frac{A+B+C+D+\ldots.}{2^m}\right)^{2^m} \tag{6}$$

En second lieu, si n n'est pas un terme de la progression géométrique $2, 4, 8, 16, \ldots.$, on désignera par 2^m un terme de cette progression supérieur Ĺ n, et l'on fera

$$K = \frac{A+B+C+D+\ldots}{n},$$

puis, revenant Ĺ la formule (6), et en supposant dans le premier membre de cette formule les $2^m - n$ derniers facteurs égaux Ĺ K, on trouvera

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} \leq \left[\frac{A+B+C+D+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

ou, en d'autres termes,

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} \leq K^{2^m}.$$

On aura donc par suite

$$ABCD... \leq K^n = \left(\frac{A+B+C+D+...}{n}\right)^n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration ci-dessous a un grand mérite : elle est susceptible d'être proposée en classe de Terminale. Un tableau de variation donne l'inégalité

$$\ln(x) \leqslant x-1 \qquad (x>1).$$

On choisit alors $x_1, \cdots, x_n > 0$, on pose

$$S = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

L'inégalité précédente donne

$$\ln\left(\frac{x_k}{S}\right) \leqslant \frac{x_k}{S} - 1 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

En sommant, on a donc

$$\ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{S^n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{S} - 1\right).$$

La somme de droite vaut 0. En prenant l'exponentielle,

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant S^n,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

RETOUR AU SOMMAIRE

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Deuxième exercice national

Série S

Liber abaci

Éléments de solution

1. La première décomposition proposée comporte des dénominateurs identiques, la seconde n'est pas une somme d'inverses d'entiers. On peut écrire $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

2. a)

k	p	q	n	$pn - q$	qn
1	4	17	5	3	85
2	3	85	29	2	2 465
3	2	2 465	1233	1	3 039 345
4	1	3 039 345	3 039 345	0	

b) À l'issue du $N^{\text{ième}}$ tour de boucle, le quotient $\frac{p_N}{q_N}$, qui est nul, apparaît comme la différence entre $\frac{p_1}{q_1}$ et une somme de fractions unitaires. Donc $\frac{p}{q}$ est bien somme de fractions unitaires. Par ailleurs

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k} < \frac{1}{n_k - 1} - \frac{1}{n_k} = \frac{1}{(n_k - 1)n_k} \leqslant \frac{1}{n_k}$$

prouve que la suite (n_k) est strictement décroissante.

c) On a $p_k n_k - q_k = p_{k+1}$ et $\frac{1}{n_k} \leqslant \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$, et donc $p_{k+1} - p_k = p_k(n_k - 1) - q_k$. Le membre de droite est strictement négatif, donc la suite des p_k est strictement décroissante. Il s'ensuit qu'il existe un certain N pour lequel $p_N = 0$. L'algorithme s'arrête.

3. a) Le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \frac{p}{q}$ est 1. On pourrait accepter 1 comme « fraction unitaire », mais dès que $\frac{p}{q} \geqslant 2$, 1 sera répété, ce qui est dans tous les cas interdit.

b) Le premier membre de la première inégalité à montrer comporte a termes tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2a}$, dont au moins un est strictement supérieur à $\frac{1}{2a}$, car $a+1 < 2a$ dès que $a > 1$. Le premier membre de la seconde inégalité comporte $3a$ termes, les a premiers sont les mêmes que ceux de la sommes précédente. Pour les autres, on reconnaît : $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+}) + \frac{1}{2a+3} + \cdots + \frac{1}{2a+2a}$ que l'on minore en faisant jouer à $2a$ le rôle antérieur de a.

c) $\frac{1}{a+1} < \frac{1}{4}$. En ajoutant à ce premier terme, inférieur à 1, les fractions unitaires « consécutives », on finit par dépasser 1, question précédente (inégalité de droite).
Notons b le dernier entier supérieur à a pour lequel la somme est encore inférieure à 1. Bien sûr $b > 2a$, question précédente (inégalité de gauche).

d) Considérons un rationnel $\frac{p}{q}$ supérieur à 1 et écrivons $\frac{p}{q} = n + \frac{p'}{q'}$, expression dans laquelle n est la partie entière de $\frac{p}{q}$. Une écriture égyptienne de $\frac{p'}{q'}$ demande des fractions unitaires de dénominateurs inférieurs strictement à un certain N_0. Si on écrit $n = 1+1+1+\cdots+1$, on va décomposer chacun des 1 en somme de fractions unitaires (en prenant garde que les dénominateurs soient tous différents).
Pour le premier 1, Utiliser le résultat de la question c. en prenant pour premier dénominateur $a+1$ un nombre supérieur à N_0. On peut approcher 1 à moins de $\frac{1}{b+1}$. Le rationnel restant est inférieur à $\frac{1}{b+1}$ et admet une écriture égyptienne dont tous les dénominateurs sont supérieurs à $b+1$.
Pour l'éventuel second 1, on recommence, en prenant pour premier dénominateur un entier supérieur à tous ceux utilisés jusque-là.

Ainsi de suite.

Pour varier à l'infini les décompositions, on peut par exemple augmenter de 1 le premier dénominateur intervenant dans la décomposition du premier 1…

Compléments et commentaires de Max Hochart

Comme le précise la première question, une décomposition d'un rationnel en fraction égyptienne n'est pas unique. Par exemple,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

On peut imposer une décomposition unique en ajoutant une condition : tout rationnel $\frac{a}{b} \in]0,1]$ peut s'écrire de manière unique

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1 p_2} + \cdots + \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_k},$$

les p_i étant des entiers tels que

$$2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_k.$$

On peut programmer un algorithme permettant de calculer les p_i, à partir de a et b. Les seules notions utiles sont celles de division euclidienne et partie entière.

Un prolongement possible est fourni par les fractions de Engel[1] : tout réel $x \in]0,1]$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_k},$$

avec

$$2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3 \leqslant p_4 \cdots.$$

On montre alors que x est rationnel si et seulement si la suite $(p_k)_{k\geqslant 1}$ est stationnaire. Un sens est assez facile : si la suite est stationnaire, la limite des sommes partielles est rationnelle, c'est une belle utilisation du calcul des sommes géométriques.

Ceci fournit une preuve surprenante de l'irrationnalité du nombre e puisque

$$e - 2 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

0. Friedrich Engel (1861-1941) est un mathématicien allemand.

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Troisième exercice national

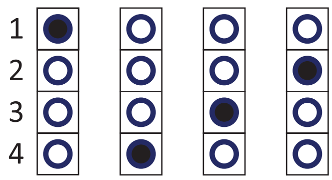
Séries autres que S

Demi-tour !

Éléments de solution

1. Supposons qu'une des deux opérations concerne le pion M et l'autre le pion N.
   Supposons $N < M$. On commence par retourner le pion M. Tous les pions de numéro inférieur ou égal à M changent de couleur. On retourne le pion N et tous les pions de numéro inférieur ou égal à N changent de couleur. Résultat : seuls les pions de numéros compris entre $N+1$ et M ont changé de couleur. Si on pratique ces opérations dans l'ordre inverse, les mêmes pions sont retournés une fois, les mêmes deux fois. L'ordre des opérations n'intervient donc pas.
2. Deux opérations identiques s'annihilent.
3. A : 1, B : 4 puis 3 puis 2 puis 1, C : 3 puis 2, D : 4 puis 3 puis 2.
4. a) et b) Comme on parcourt la colonne de n à 1, tous les jetons noirs rencontrés sont blanchi. Un jeton noir à partir duquel on réalise une opération n'est plus concerné par les suivantes, donc reste blanc. On réalise au maximum n opérations (cas d'une alternance de jetons noirs et blancs, le jeton n étant noir).
   Soit maintenant une méthode de blanchiment. L'ordre des opérations ne compte pas : on peut donc partir du dernier jeton, remonter jusqu'au premier, et neutraliser les doublons. Cela coïncide avec la méthode proposée, qui est minimale.
5. a) On utilise le mode opératoire précédent : chaque jeton noir rencontré, en partant du jeton n, est blanchi ou laissé blanc s'il l'était déjà, en laissant intacts ceux du dessous : c'est bien cela l'important. Cette méthode blanchit tout.

   b) Dans le plateau ci-dessous, le pion noir circule au fur et à mesure des opérations et rejoint sa place initiale. Le tableau de 4 cases ne peut pas être blanchi.



6. **Jeu à deux dimensions**
   On peut appliquer la méthode de la question 4. colonne par colonne, en commençant par la colonne n. Cela garantit le blanchiment de la colonne n. On passe ensuite au dernier jeton de la colonne $n-1$ et on remonte la colonne, etc. On passe ainsi par toutes les cases, qui peuvent donc être toutes blanchies.
7. **Trois dimensions**
   Le jeu a la forme d'un cube. Les pions sont numérotés par des triplets (i, j, k) où i est le numéro de la couche, j le numéro de la tranche (compté de gauche à droite), k le numéro du rang (compté de l'arrière vers l'avant). En changeant de couleur le pion (i, j, k), on change la couleur de tous les pions dont la couche, la tranche et le rang ont des numéros inférieurs ou égaux respectivement à i,j,k.

RETOUR AU SOMMAIRE