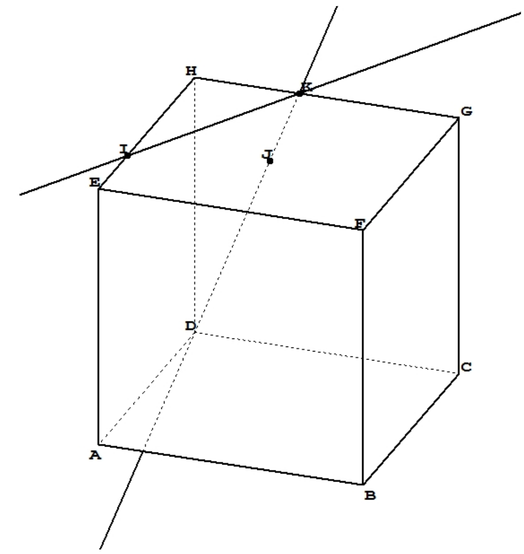
Correction : Exercice de géométrie dans l'espace sur geospace

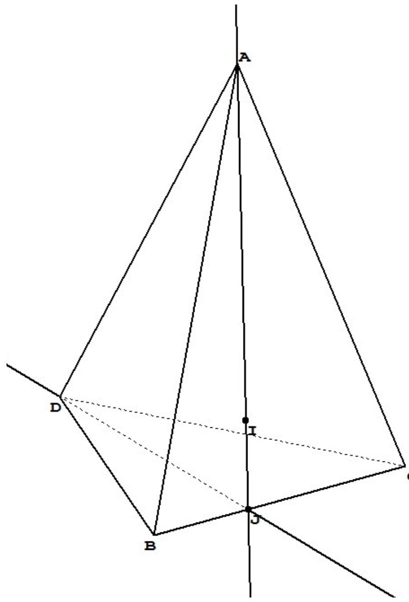
Ex1 : Ouvrir le fichier « excube plan » . On y trouve un cube et les points I (sur le segment [EH] et J sur la face (HGCD).
Déterminer (justifier) et construire l'intersection du plan (DIJ) avec le plan (EFG).

Les plans (DIJ) et (EFG) sont sécants selon une droite qui passe par I, car I appartient aux deux plans et ils ne sont pas confondus.
Les droites (DJ) et (HG) sont incluses dans le plan (HGC) et ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point K qui appartient à [HG] donc à (EFG) et à (DJ) donc à (DIJ) et donc à la droite d'intersection cherchée qui est donc (IK).



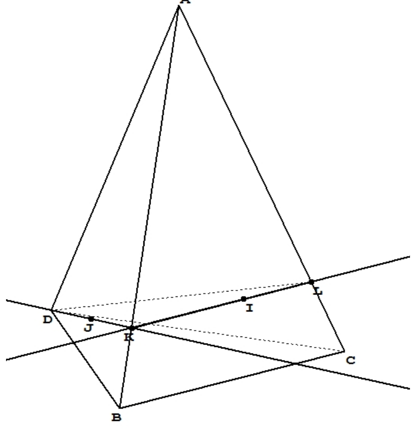
Ex2 : Ouvrir le fichier « TETRA1 ». On y trouve un tétraèdre ABCD et I un point de la face (ABC).
Déterminer (et justifier) l'intersection de (AID) et (DBC).

Les plans (DBC) et (DAI) ont le point D en commun et ils ne sont pas confondus donc ils sont sécants selon une droite qui passe par D. Dans le plan (ABC) les droites (BC) et (AI) ne sont pas parallèles donc elles se coupent en un point J qui appartient aux plans (DBC) (car à (BC)) et (DAI) (car à (AI)) donc la droite d'intersection est (DJ).



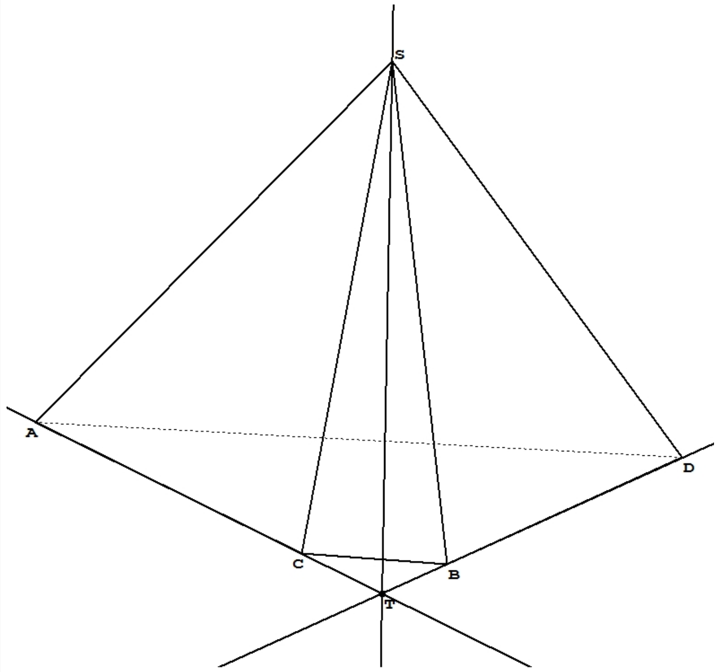
Ex3 : Ouvrir le fichier « TETRA2 ». On y trouve un tétraêdre ABCD, I un point de la face (ABC) et J un point de la face (ABD).
1- Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (ABC).
2- En déduire la section du tétraêdre par le plan (DIJ).

1-(DIJ) et (ABC) sont sécants selon une droite passant par I (commun aux deux et ils ne sont pas confondus) et par le point K intersection des droites (AB) et (DJ) qui sont coplanaires dans (ABD) (car J appartient à (ABD)) et non parallèles. Ce point K appartient alors aux plans (DIJ) (car à (DJ)) et (ABC) (car à (AB)) donc à l'intersection des deux qui est donc la droite (KI).
2- (KI) coupe le segment [AC] en L, la section du tétraèdre est le triangle DKL.



Ex4:
Ouvrir le fichier « PYRAMIDE1 ». On y trouve une pyramide SABCD.
Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD)

Les deux plans sont sécants selon une droite qui passe par S, et par T intersection des droites (AC) et (BD) qui sont coplanaires puisqu'on a une pyramide donc les quatre points de la base sont dans un même plan, et elles ne sont pas parallèles (on doit l'admettre ici, faux si la base est un parallélogramme).

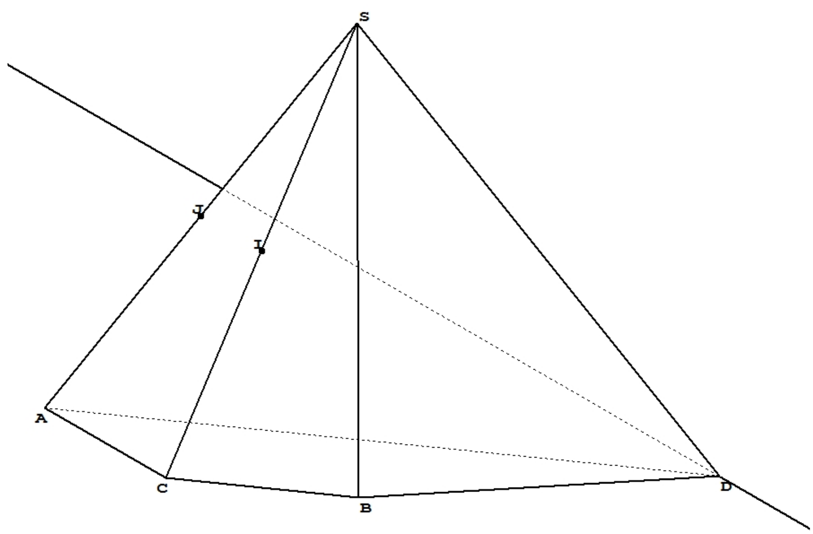


Ex5 : Ouvrir le fichier « PYRAMIDE2 ». On y trouve une pyramide SABCD à base trapézoïdale.
Déterminer l'intersection des plans (SAD) et (SCB).

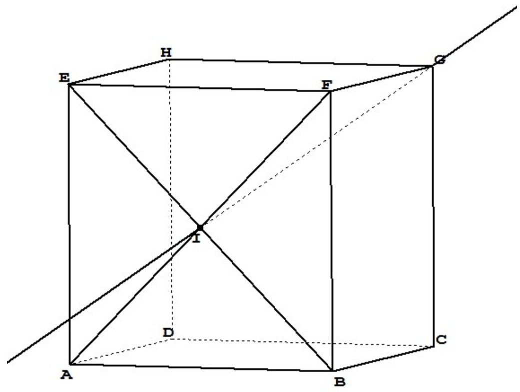
C'est la droite parallèle à (AD) et (BC) passant par S. En effet les plans (SAD) et (SBC) ont le point S en commun et ils ne sont pas parallèles donc ils se coupent selon une droite passant par S, et comme les droites (BC) et (AD) incluses dans ces plans sont parallèles (la base est un trapèze), le théorème du toit garantit que l'intersection des plans leur est parallèle.

Ex6 :Ouvrir le fichier « PYRAMIDE3 ». On y trouve une pyramide SABCD et les points I et J milieux respectifs de [SC] et [SA].
Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (ABC).

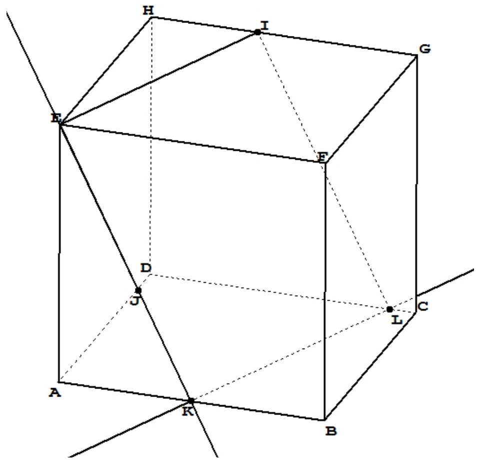
I et J sont les milieux de deux côtés du triangle SAC, donc la droite (IJ) est parallèle au troisième côté (AC). Les plans (SAC) et (ABC) contiennent respectivement les droites (IJ) et (AC) donc, d'après le théorème du toit, s'ils se coupent c'est selon une droite parallèle à ces deux droites. Or le point D est dans le plan de base de la pyramide (ABC) et dans le plan (DIJ) donc ces deux plans (qui ne sont pas confondus) sont sécants selon la droite passant par D et parallèle à (IJ) et (AC).



Ex7 : Ouvrir le fichier « CUBE2 » . Déterminer l'intersection des plans (GBE) et (GAF).

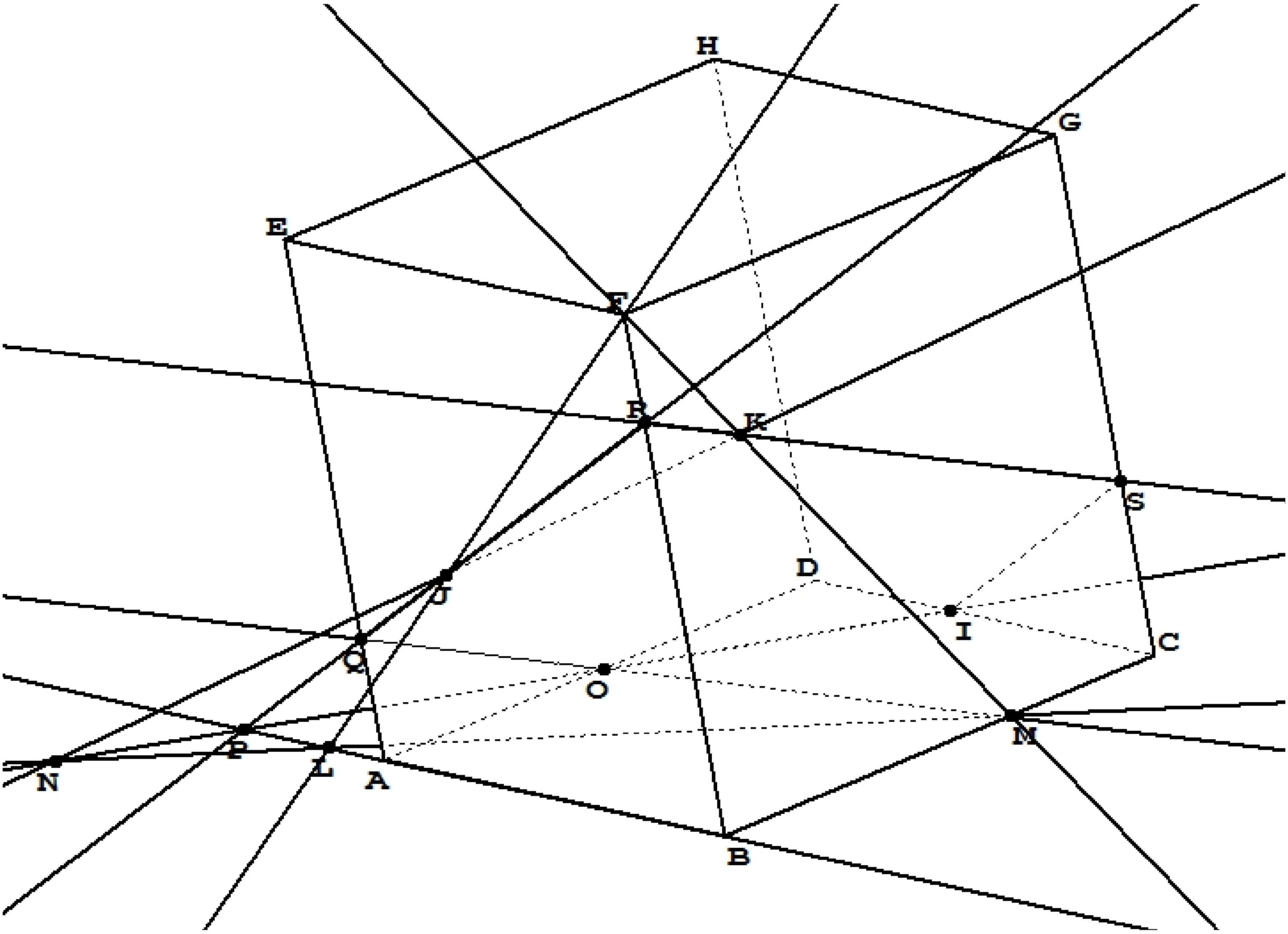
Les plans (GBE) et (GAF) se coupent selon une droite qui passe par G, et par I point d'intersection des droites (EB) et (AF), les diagonales du carré ABEF, puisqu'elles sont sécantes dans le plan (ABF) et que leur point d'intersection appartient à (BE) donc à (GBE) et à (AF) donc à (GAF).	

Ex 8 :Ouvrir le fichier « CUBE3 » . ABCDEFGH est un cube, I un point du segment [HG] et J un point de la face (ABFE). Déterminer la section du cube par le plan (EIJ).

Le segment [EI] est la section de la face EFGH par (EIJ). Ensuite la droite (EJ) incluse dans le plan (EAB) coupe (AB) avec laquelle elle est coplanaire en un point K qui appartient au segment [AB], ce qui donne un autre des segments de la section (avec la face ABFE ici). Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles (faces opposées du cube) donc le plan (EIJ) les coupe selon des droites parallèles, il coupe donc le plan (ABC) selon une droite parallèle à (EI) passant par K. Cette droite coupe [DC] en L. La section est le parallélogramme EILK (car pour les mêmes raisons (EK) et (IL) sont aussi parallèles).	

Ex9 :Ouvrir le fichier « CUBE4 » . ABCDEFGH est un cube, I un point du segment [DC] , J un point de la face (ABFE) et K un point de la face (BCFG).
1- Déterminer l'intersection des plans (FKJ) et (ABC)
2- En déduire le point d'intersection de (KJ) et du plan (ABC)
3- En déduire la section du cube par le plan (IJK).

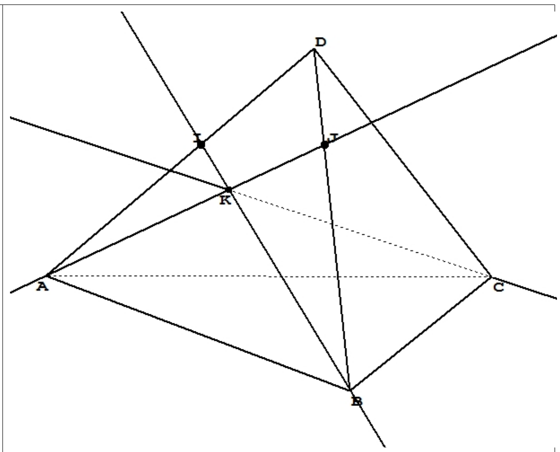
1- (FK) et (BC) sont sécantes dans le plan (FBC) en un point M et (FJ) et (AB) sont sécantes dans le plan (FAB) en un point L. L et K sont deux points communs à (FKJ) et (ABC), plans non confondus, qui sont donc sécants selon (LM).
2- La droite (LM) et la droite (KJ) sont donc deux droites du plan (FKJ) dans lequel elles ne sont pas parallèles donc elles se coupent un un point N. Ce point N appartenant à (LM) qui est incluse dans le plan (ABC) d'après le 1, il appartient à la fois à (KJ) et à (ABC), il est donc le point d'intersection de la droite et du plan.
3- Les points N et I sont deux points qui appartiennent aux plans (ABC) et (IJK) (car N intersection de (JK) et (ABC)), plans non confondus qui se coupent donc selon la droite (NI) qui coupe [AD] en O, le segment [OI] formant la section de la face ABCD par (IJK).
On peut alors chercher l'intersection du plan (IJK) avec le plan (EFB) , car on en connaît un point: J et même un second : le point P intersection de la droite (IN) avec la droite (AB) qui sont sécantes dans le plan (ABC). Ce point P appartient à (IJK) car il appartient à (NI) incluse dans (IJK) et aussi à (ABF) car à (AB). La droite (PJ) coupe les segments [EA] et [FB] en Q et R et [QR] est la section de la face ABEF par (IJK).
(RK) coupe [GC] en S dans le plan (FGB) et comme R et K sont à la fois dans (FGB) et dans (IJK), le segment [RS] est la section de la face FGCB par (IJK). La section du cube est donc le pentagone OQRSI.
Rq : Les droites (IS) et (QR) d'une part et (OQ) et (RS) d'autre part sont parallèles car les faces opposées d'un cube sont parallèles et donc (IJK) les coupe selon des droites parallèles. On pouvait éventuellement s'en servir.



<u>Ex 10 :</u> SABCD est une pyramide à base trapèze. I et J sont les milieux des segments [SC] et [SB]
Montrer que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.

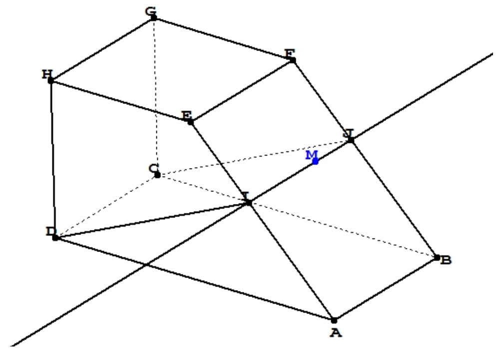
Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles d'après le théorème de la droite des milieux, donc les droites (IJ) et (AB) le sont aussi puisque ABCD est un trapèze où visiblement (AD) et (BC) sont parallèles. les points I,J,D et A sont coplanaires (des droites parallèles sont coplanaires) et donc les droites (AI) et (DJ) sont coplanaires, et en admettant qu'elles ne soient pas parallèles, elles sont donc sécantes.

<u>Ex 11 :</u> ABCD est un tétraèdre. I et J des points des arêtes [AD] et [BD]
Déterminer et construire l'intersection des plans (CIB) et (AJC)

C'est la droite (CK) puisque les plans ont le point C en commun, et qu'ils ne sont pas confondus, ils se coupent selon une droite. (BI) et (AJ) sont des droites sécantes dans (ABD) en un point K qui appartient alors aux deux plans (CAJ) et (CIB).	

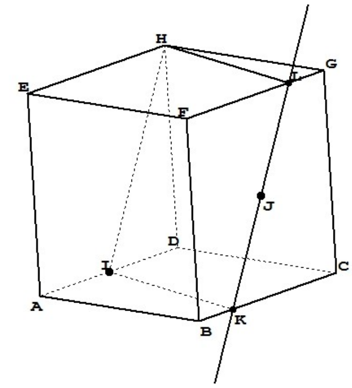
Ex 12 : ABCDEFGH est un prisme droit à base trapèze. M un point de la face ABFE.
1- Montrer que (GH) et (ED) sont orthogonales
2-Déterminer et construire la section du prisme par le plan (DCM). On pourra montrer qu'il s'agit d'un rectangle.

1-Le prisme étant droit la droite (GH) est orthogonale à (EH) et à (HD) donc au plan (EHD) (ce qu'on peut dire directement) et donc à toutes les droites de ce plan, y compris (DE).
2- Les plans (ABE) et (DCM) ont le point M en commun, et comme les droites (AB) et (DC) sont orthogonales au plan (ABE) (du fait du prisme droit et non du trapèze) elles sont parallèles entre elles.
Le théorème du toit nous permet alors d'affirmer que les plans (DCM) et (ABE) qui les contiennent se coupent selon une droite parallèle à (AB) passant par M. Cette dernière coupe [EA] et [BF] en I et J, et la section est le quadrilatère IJCD.
Les plan (EAD) et (GEB) étant parallèles le plan (IJK) les coupe selon des droites parallèles donc (DI) est parallèle à (CJ) et comme on sait déjà que (AB) est parallèle à (IJ), on a un parallélogramme pour DIJC.
De plus (CD) et (ID) sont orthogonales (et même perpendiculaires) puisque (DC) est orthogonale au plan (DAE) qui contient (DI), donc le parallélogramme est un rectangle. Le trapèze initial ne joue ici aucun rôle.



Ex 13 :Déterminer la section du cube par le plan (HIJ) où J est sur la face (BCGF)

Le segment [HI] est la section de la face EHDA par le plan (HIJ), et comme les faces opposées d'un cube sont parallèles, le plan (HIJ) coupe (FGC) selon une droite parallèle à (HI), et elle passe par J qui est commun aux deux plans. Cette droite coupe les segments [BC] et [FG] selon les points K et L, ce qui donne la section du cube par le plan : c'est le parallélogramme IKLH (car (HL) et (IK) sont parallèles pour la même raison que (LK) et (HI)).



Ex 14 : Déterminer la section du cube par le plan (HIJ)

On procède de même qu'au début de l'exercice précédent sauf que la parallèle à (HI) passant par J coupe le segment [FG] en K, ce qui permet d'avoir trois segments de la section finale : [HI],[JK] et[KH], mais on n'a pas la section des faces « avant » et « inférieures ».
Pour cela, on peut tracer la parallèle à (HK) passant par I qui coupe [AB] en L et permet de finir la section. (On prend la parallèle à (HK) car les plans (HGF) et (ABC) sont parallèles donc (HIJ) les coupe selon des droites parallèles.)
On peut aussi utiliser M point d'intersection des droites (KJ) et (BC) sécantes dans (BCG), le point M appartient alors aux plans (ABC) (car à (BC)) et (HIJ) (car à (KJ) qui en fait partie), et donc (IM) est la droite d'intersection des plan (HIJ) et (ABC) ce qui permet de trouver le point L.
Dans les deux cas la section est le pentagone ILJKH.