Un exemple de sujet de bac avec plusieurs suites, un algorithme et des probabilités : Ex 4 Septembre 2016 en version non guidée.

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1.Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si *a* code le côté de la pièce A à un instant donné, alors 1-*a* code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :       a, b, d, s sont des entiers
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                  | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                  | entre 1 et 6
                  | Si d ⩽ 2
                  |    | alors a prend la valeur 1 − a
                  |    | sinon Si d ⩽ 4
                  |    |          | alors b prend la valeur 1 − b
                  |    |       FinSi
                  | FinSi
                  | s prend la valeur a + b
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

a.On exécute cet algorithme en saisissant n=3 et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour *d* sont 1; 6 et 4. Compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1er passage boucle Pour					
2e passage boucle Pour					
3e passage boucle Pour					

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

2.Pour tout entier naturel *n*, on note :

- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n=P(X_n)$; $y_n=P(Y_n)$ et $z_n=P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n , Y_n et Z_n .

a. Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n , z_n et x_n (On pourra s'aider d'un arbre pondéré)

c. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $y_{n+1}=-\frac{1}{3}y_n+\frac{2}{3}$.

d. Si on suppose que la suite (y_n) converge, quelle peut être sa limite L ?

d. Montrer que la suite *b* définie par $b_n=y_n-L$ est géométrique, en déduire une expression de y_n en fonction de *n*.

e. Si on répète un très grand nombre de fois la manipulation des pièces, avec quelle probabilité peut-on s'attendre à ce qu'une seule des deux pièces soit sur face ?