

Un exemple de sujet de bac avec plusieurs suites, un algorithme et des probabilités : Ex 4 Septembre 2016

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

<p>Variables : a, b, d, s sont des entiers i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1</p> <p>Initialisation : a prend la valeur 0 b prend la valeur 0 Saisir n</p> <p>Traitement : Pour i allant de 1 à n faire d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6 Si $d \leq 2$ alors a prend la valeur $1 - a$ sinon Si $d \leq 4$ alors b prend la valeur $1 - b$ FinSi FinSi s prend la valeur $a + b$ FinPour</p> <p>Sortie : Afficher s</p>	<p>a. On exécute cet algorithme en saisissant $n=3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1; 6 et 4. Compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="padding: 2px;">variables</th> <th style="padding: 2px;">i</th> <th style="padding: 2px;">d</th> <th style="padding: 2px;">a</th> <th style="padding: 2px;">b</th> <th style="padding: 2px;">s</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 2px;">initialisation</td> <td style="padding: 2px;">\times</td> <td style="padding: 2px;">\times</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;">\times</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">1^{er} passage boucle Pour</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">2^e passage boucle Pour</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">3^e passage boucle Pour</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;"></td> </tr> </tbody> </table>	variables	i	d	a	b	s	initialisation	\times	\times			\times	1 ^{er} passage boucle Pour						2 ^e passage boucle Pour						3 ^e passage boucle Pour					
variables	i	d	a	b	s																										
initialisation	\times	\times			\times																										
1 ^{er} passage boucle Pour																															
2 ^e passage boucle Pour																															
3 ^e passage boucle Pour																															

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n , on note :

- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n , Y_n et Z_n .

a. Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

c. Compléter l'arbre ci-contre, certaines des probabilités sur ses branches pouvant être nulles :

d. Pour tout entier naturel n , exprimer z_n en fonction de x_n et y_n .

e. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}.$$

f. On pose, pour tout entier naturel n , $b_n = y_n - \frac{1}{2}$.

Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

g. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. Interpréter le résultat.

