EXERCICE 1

a) $f'(x)=2\times 5x^4-4\times 3x^2+5=10x^4-12x^2+5$

b) $f(x)$ est de la forme $f(x)=(u(x))^3$ avec $u(x)=3x^2+5$. Donc , $f'(x)=3\times(u'(x))^2\times(u(x))^2$

Comme $u'(x)=3\times 2x=6x$, on obtient : $f'(x)=3\times 6x\times(3x^2+5)^2=18x(3x^2+5)^2$

c) $f(x)$ est de la forme $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=3\cos x+5$ et $v(x)=2\sin x+3$.

Donc , $f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}$.

Comme $u'(x)=-3\sin x$ et $v'(x)=2\cos x$, on obtient :

$$f'(x)=\frac{-3\sin x\times(2\sin x+3)-2\cos x\times(3\cos x+5)}{(2\sin x+3)^2}=\frac{-6\sin^2 x-9\sin x-6\cos^2 x-10\cos x}{(2\sin x+3)^2}$$

On en déduit que $f'(x)=\dfrac{-6(\sin^2 x+\cos^2 x)-9\sin x-10\cos x}{(2\sin x+3)^2}$.

Comme $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, on en conclut que $f'(x)=\dfrac{-6-9\sin x-10\cos x}{(2\sin x+3)^2}=-\dfrac{6+9\sin x+10\cos x}{(2\sin x+3)^2}$

d) f est de la forme $f(x)=10\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2+3x+5$. Donc , $f'(x)=10\times\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Comme $u'(x)=2x+3$, on en déduit que $f'(x)=10\times\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}=\dfrac{5(2x+3)}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$.

e) $f(x)$ s'écrit $f(x)=2\cos(ax+b)$ avec $a=10$ et $b=3$.

Donc , $f'(x)=2\times(-10\sin(10x+3))=-20\sin(10x+3)$

EXERCICE 2

1. Pour tout réel x , on obtient que : $P'(x)=3x^2-9\times 2x+24=3(x^2-6x+8)$.

Le discriminant de l'expression x^2-6x+8 est $\Delta=(-6)^2-4\times 1\times 8=4$.

Ce discriminant étant strictement positif , on en déduit que l'équation $x^2-6x+8=0$ admet deux racines réelles distinctes $x_1=\dfrac{-(-6)+\sqrt{4}}{2\,´1}=4$ et $x_2=\dfrac{-(-6)-\sqrt{4}}{2\,´1}=2$.

Comme le coefficient en x² dans l'expression x² - 6x + 8 est positif , on en déduit que x^2-6x+8 est positif lorsque $x<2$ ou $x>4$ et négatif lorsque $2<x<4$.

Grâce aux résultats obtenus à la question 1.a) , on en déduit le tableau de variations suivant :

x	-∞		2		4		+∞
Signe de P'(x)		+		-	0	+	
Variations de P		↗	10	↘	6	↗	

2. Comme la fonction P est continue , strictement croissante et que $P(0)=-10$ et $P(2)=10>4$, on en déduit , grâce au théorème des valeurs intermédiaires , que l'équation $P(x)=4$ admet au moins une solution dans l'intervalle]0 ; 2] .

Comme P est strictement croissante sur]-∞ ; 2], si $x<0$, alors $P(x)<-10$, donc l'équation $P(x)=4$ n'admet aucune solution négative.

De plus , comme P admet un minimum égal à 6 sur l'intervalle [2 ; +∞[, on en déduit que l'équation $P(x)=4$ n'admet aucune solution dans cet intervalle .

On en conclut que l'équation $P(x)=4$ admet une solution α unique dans P .

Enfin , comme $P(0{,}804)\approx 3{,}99797...$ et que $P(0{,}804)\approx 4{,}00944...$, on en déduit que :

$P(0{,}804)<P(\alpha)<P(0{,}805)\ \Rightarrow\ 0{,}804<\alpha<0{,}805$, car la fonction P est strictement croissante sur]-∞ ; 2] .

EXERCICE 3

1. On note $P(n)$ la propriété : " $u_n=\dfrac{6}{n+2}$ "

Initialisation : $u_0 = 3$ et , $\dfrac{6}{0+2}=3$ donc on a bien $u_0=\dfrac{6}{0+2}$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : considérons un entier k tel que $P(k)$ soit vérifiée et montrons que , sous cette hypothèse la propriété au rang suivant $P(k + 1)$ est vraie .

On sait que $u_{k+1}=\dfrac{6u_k}{u_k+6}$

Or , par hypothèse de récurrence, $u_k=\dfrac{6}{k+2}$

Donc , $u_{k+1}=\dfrac{6\times\dfrac{6}{k+2}}{\dfrac{6}{k+2}+6}=\dfrac{\dfrac{36}{k+2}}{\dfrac{6+6k+12}{k+2}}=\dfrac{\dfrac{36}{k+2}}{\dfrac{6k+18}{k+2}}=\dfrac{36}{k+2}\times\dfrac{k+2}{6k+18}=\dfrac{36}{6k+18}=\dfrac{6}{k+3}$,ce qui établit la propriété au rang $k + 1$.

Conclusion : comme la propriété $P(n)$ est vraie au rang $n = 0$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang , elle est donc vraie pour tout entier $n\geq 0$.

2.a) On note $P(n)$ la propriété : " $6\leq u_n\leq 15$ "

Initialisation : $u_0 = 6$, on a bien $6\leq u_n\leq 15$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : considérons un entier k tel que $P(k)$ soit vérifiée et montrons que , sous cette hypothèse la propriété au rang suivant $P(k + 1)$ est vraie .

On sait que $6\leq u_n\leq 15$

Donc , $4\leq\dfrac{2}{3}\times u_k\leq 10 \Rightarrow 9\leq\dfrac{2}{3}\times u_k+5\leq 15 \Rightarrow 6\leq 5\leq u_{k+1}\leq 15$,ce qui établit la propriété au rang $k + 1$.

Conclusion : comme la propriété $P(n)$ est vraie au rang $n = 0$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang , elle est donc vraie pour tout entier $n\geq 0$.

2.b) Pour tout entier n, $v_{n+1}=15-u_{n+1}=15-\left(\dfrac{2}{3}u_n+5\right)=15-\dfrac{2}{3}u_n-5=10-\dfrac{2}{3}u_n$.

Comme $v_n=15-u_n$, on a $u_n=15-v_n$, donc : $v_{n+1}=10-\dfrac{2}{3}(15-v_n)=10-10+\dfrac{2}{3}v_n=\dfrac{2}{3}v_n$.

On en déduit que la suite (vn) est géométrique de raison $q=\dfrac{2}{3}$ et de terme initial $v_0 = 15 - u_0 = 15 - 6 = 9$.

On e**n conclut que, pour tout entier *n*,** $v_n=v_0\times q^n=9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ **et, par suite, que** $u_n=15-v_n=15-9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ **.**

2.c) **Deuxième méthode :** on note $P(n)$ la propriété : $u_n=15-9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Initialisation : $u_0 = 6$ et , $15-9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=15-9=6$ donc on a bien $u_0=15-9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : considérons un entier k tel que $P(k)$ soit vérifiée et montrons que , sous cette hypothèse la propriété au rang suivant $P(k + 1)$ est vraie .

On sait que $u_{k+1}=\dfrac{2}{3}u_k+5$ .Or , par hypothèse de récurrence, $u_k=15-9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$. Donc,

$u_{k+1}=\dfrac{2}{3}\left(15-9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\right)+5=10-9\times\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^k+5=15-9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1}$, ce qui établit la propriété au rang $k+1$

Conclusion : comme la propriété $P(n)$ est vraie au rang $n = 0$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang , elle est donc vraie pour tout entier $n\geq 0$.

EXERCICE 4

1.a) Comme [*BG*] et [*CF*] sont deux diagonales d'un carré, elles sont perpendiculaires.
Comme (*EF*) est orthogonale au plan (*BCG*), elle est orthogonale à toute droite incluse dans (*BCG*), donc , en particulier à la droite (*BG*) .
On en déduit que (*BG*) est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans le plan (*CEF*) et, par suite, qu'elle est orthogonale à ce plan.
1.b) Comme (*BG*) est orthogonale au plan (*CEF*), elle est orthogonale à toute droite incluse dans (*CEF*), donc , en particulier à la droite (*CE*) .
1.c) Comme [*BD*] et [*AC*] sont deux diagonales d'un carré, elles sont perpendiculaires.
Comme (*AE*) est orthogonale au plan (*ABC*), elle est orthogonale à toute droite incluse dans (*ABC*), donc , en particulier à la droite (*BD*) .
On en déduit que (*BD*) est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans le plan (*ACE*) et, par suite, qu'elle est orthogonale à ce plan.
Comme (*BD*) est orthogonale au plan (*ACE*), elle est orthogonale à toute droite incluse dans (*ACE*), donc , en particulier à la droite (*CE*) .
On en conclut que (*CE*) est orthogonale à la fois à (*BD*) et (*BG*) et, par suite, qu'elle est orthogonale au plan (*BDG*).
2.a) Comme *I* appartient à (*SA*) et que cette droite est incluse dans (*SAB*), le point *I* appartient à (*SAB*).
Comme *J* appartient à (*SB*) et que cette droite est incluse dans (*SAB*), le point *J* appartient à (*SAB*) aussi.
On en déduit que la droite (*IJ*) est incluse dans (*SAB*).
Comme les droites (*IJ*) et (*AB*) sont coplanaires et non parallèles , elles sont sécantes en un point M .
Comme *M* appartient simultanément à (*IJ*) et (*AB*), incluse dans (*ABC*), il est le point d'intersection de (*IJ*) et du plan (*ABC*).
On démontrerait de la même façon que :

le point d'intersection de (*JK*) et (*ABC*) est *N*, le point d'intersection de (*JK*) et (*BC*)
le point d'intersection de (*IK*) et (*ABC*) est *P* ,le point d'intersection de (*IK*) et (*AC*).

2.b) Comme ces trois points appartiennent simultanément aux plans (*IJK*) et (*ABC*) , ils appartiennent à la droite d'intersection de ces deux plans, donc ils sont nécessairement alignés.

EXERCICE 5

1. • $z_1=3(1+i)-5(2i-3)=3+3i-10i+15=18-7i$;
• $z_2=(3+2i)(2-i)=6-3i+4i-2i^2=6+i+2=8+i$;
• $z_3=4-(3+5i)(-3+4i)=4-(-9+12i-15i+20i^2)=4-(-9-20-3i)=4+9+20+3i=33+3i$;
• $z_4=2i(1+i)(2-i)=2i(2-i+2i-i^2)=2i(3+i)=6i\mp 2i^2=-2+6i$.

2. • $z_1=\dfrac{1}{2+3i}=\dfrac{1\times(2-3i)}{(2+3i)\times(2-3i)}=\dfrac{2-3i}{2^2-(3i)^2}=\dfrac{2-3i}{4+9}=\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i$
• $z_2=\dfrac{10}{3i}=\dfrac{10\times(-i)}{3i\times(-i)}=\dfrac{-10i}{-3i^2}=-\dfrac{10}{3}i$
• $z_3=\dfrac{1+i}{3-i}=\dfrac{(1+i)\times(3+i)}{(3-i)\times(3+i)}=\dfrac{3+i+3i+i^2}{9-i^2}=\dfrac{2+4i}{10}=0{,}2+0{,}4i$

EXERCICE 6

1.a) $(1+i)z-11i=0\Leftrightarrow(1+i)z=11i\Leftrightarrow z=\dfrac{11i}{1+i}=\dfrac{11i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{11i+11}{2}=5{,}5+5{,}5i$.

1.b) $3iz+4(1+i)z-3(z+5)+22=i\Leftrightarrow(1+7i)z-15+22=i\Leftrightarrow(1+7i)z=-7+i\Leftarrow z=\dfrac{-7+i}{1+7i}=\dfrac{(-7+i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)}$

Donc , $z=\dfrac{-7+49i+i+7}{1+49}=i$.

1.c) $\dfrac{z-3i}{z+2}=5i\Leftrightarrow z-3i=5i(z+2)=5iz+10i\Leftrightarrow(1-5i)z=13i$

D'où $z=\dfrac{13i}{1-5i}=\dfrac{13i(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)}=\dfrac{13i-65}{26}=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

2.a) $z^2=-9\Leftrightarrow z^2=(3i)^2\Leftrightarrow z^2-(3i)^2=0\Leftrightarrow(z-3i)(z+3i)=0\Leftrightarrow z=3i$ ou $z=-3i$

2.b) $3z^2+12=0\Leftarrow z^2-(2i)^2=0\Leftrightarrow(z-2i)(z+2i)=0\Leftrightarrow z=2i$ ou $z=-2i$

2.c) $(z+2)^2+4=0 \Leftrightarrow (z+2)^2-(2\mathrm{i})^2=0 \Leftrightarrow (z+2-2\mathrm{i})(z+2+2\mathrm{i})=0 \Leftrightarrow z=-2+2\mathrm{i}$ ou $z=-2-2\mathrm{i}$

2.d) $2(z-3\mathrm{i})^2+6=0 \Leftarrow (z-3\mathrm{i})^2+3=0 \Leftrightarrow (z-3\mathrm{i})^2-(\sqrt{3}\mathrm{i})^2=0 \Leftrightarrow (z-3\mathrm{i}-\sqrt{3}\mathrm{i})(z-3\mathrm{i}+\sqrt{3}\mathrm{i})=0$

Donc, $z=3-\sqrt{3}\mathrm{i}$ ou $z=3+\sqrt{3}\mathrm{i}$

3.a) Le discriminant de z^2+3z-4 est $\Delta=3^2-4\times1\times(-4)=25$.

Comme ce **discriminant** est strictement **positif**, l'équation $z^2+3z-4=0$ admet deux solutions **réelles** :

$$z_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times1}=-4 \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times1}=1$$

3.b) Le discriminant de z^2+4z+5 est $\Delta=4^2-4\times1\times5=-4$.

Comme ce **discriminant** est strictement **négatif**, l'équation $z^2+4z+5=0$ admet deux solutions **complexes conjuguées** : $z_1=\frac{-4-\sqrt{4}i}{2\times1}=-2-i$ et $z_2=\frac{-4+\sqrt{4}i}{2\times1}=-2+i$

3.c) Le discriminant de $3z^2+5z+3$ est $\Delta=5^2-4\times3\times3=-11$.

Comme ce **discriminant** est strictement **négatif**, l'équation $3z^2+5z+3=0$ admet deux solutions **complexes conjuguées** : $z_1=\frac{-5-\sqrt{11}i}{2\times3}=-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i$ et $z_2=\frac{-5+\sqrt{11}i}{2\times3}=-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i$

3.d) Le discriminant de $3z^2-\sqrt{12}\,z+1$ est $\Delta=(-\sqrt{12})^2-4\times3\times1=0$.

Comme ce **discriminant** est **nul**, l'équation $3z^2-\sqrt{12}\,z+1=0$ admet **une** solutions **réelle** :

$$z_0=\frac{-(-\sqrt{12})}{2\times3}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3.e) Le discriminant de $2z^2+3z+2$ est $\Delta=3^2-4\times2\times2=-7$.

Comme ce **discriminant** est strictement **négatif**, l'équation $2z^2+3z+2=0$ admet deux solutions **complexes conjuguées** : $z_1=\frac{-3-\sqrt{7}i}{2\times2}=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i$ et $z_2=\frac{-3+\sqrt{7}i}{2\times2}=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i$

4. Pour tout z, on a :

$$(z^2+4)(z^2-\sqrt{2}\,z-4)=z^4-\sqrt{2}\,z^3-4z^2+4z^2-4\sqrt{2}\,z-16=z^4-\sqrt{2}\,z^3-4\sqrt{2}\,z-16=f(z).$$

On a donc bien $f(z)=(z^2+4)(z^2-\sqrt{2}\,z-4)$.

L'équation $f(z)=0$ équivaut donc à : $z^2+4=0$ ou $z^2-\sqrt{2}\,z-4=0$.

• $z^2+4=0 \Leftrightarrow z^2=-4 \Leftrightarrow z=2\mathrm{i}$ ou $z=-2\mathrm{i}$

•Le discriminant de $z^2-\sqrt{2}\,z-4$ est $\Delta=(-\sqrt{2})^2-4\times1\times(-4)=18$.

Comme ce **discriminant** est strictement **positif**, l'équation $z^2-\sqrt{2}\,z-4=0$ admet deux solutions **réelles** :

$$z_1=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{18}}{2\times1}=\frac{-\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2\times1}=-2\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{18}}{2\times1}=\frac{-\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2\times1}=\sqrt{2}$$

L'équation $f(z)=0$ a donc quatre solutions $2\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$, $-2\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.