Correction des exercices d'entraînement

EXERCICE 1

1. **a)** L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des abscisses des points de $(\mathscr{C})$.
On en conclut que l'ensemble de définition de f est $[-4\ ;\ 8]$.

b) Tableau de valeurs :

Valeurs de x	-4	1	5	6
Valeurs de $f(x)$	2	3	-1	-2

2. **a)**
- Résoudre l'équation $f(x) = -1$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C})$avec la droite d'équation $y = -1$.
  Par lecture graphique , on obtient ainsi que les solutions de cette équation sont -1 et 5 et 6,7 .
- Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 3$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés au dessus de la droite d'équation $y = 3$.
  Par lecture graphique , on obtient ainsi que l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathscr{S}_1 = [1\ ;\ 3] \cup [7,6\ ;\ 8]$.

b) Le tableau de signes de $f(x)$ est le suivant :

x	-4		-2		0		4		7		8
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Le tableau de variations complet de f est le suivant :

x	-4		-1		2		6		8
$f(x)$	2	↘	-1	↗	5	↘	-2	↗	6

d) Sur $[-4\ ;\ 8]$, le maximum de f est 6 et son minimum est -2 .

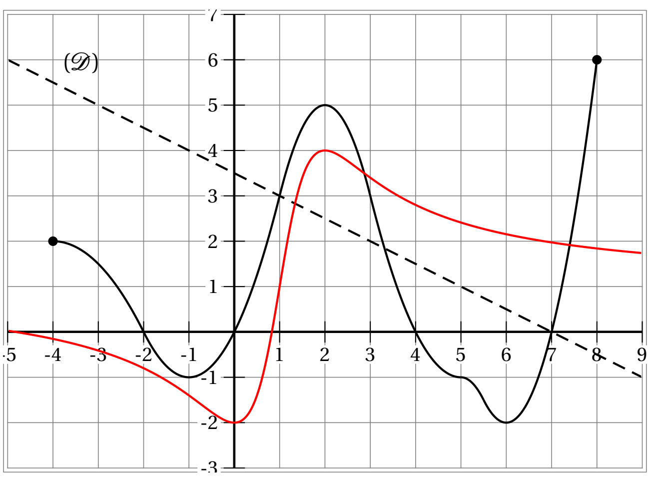
3. **a)** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés en dessous de la droite $(\mathscr{D})$.
On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est $\mathscr{S}_2 = [1\ ;\ 3,3] \cup [7\ ;\ 8]$.

b) On sait que $g(-3) = 5$ et $g(-3) = 5$.

c) Comme g est une fonction affine , l'expression de $g(x)$ est de la forme $g(x) = ax + b$.
En posant $x_1 = -3$ et $x_2 = 5$, on sait , grâce aux résultats du cours , que $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-5}{5-(-3)} = \dfrac{-4}{8} = -0,5$.
Comme $f(-3) = 5$, on en déduit que $-0,5 \times (-3) + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - 1,5 = 3,5$.
On en conclut que , pour tout réel x : $g(x) = -0,5x + 3,5$.

d)
- L'image de 10 par g est $g(10) = -0,5 \times 10 + 3,5 = -1,5$;
- Déterminer le(ou les) antécédent(s) de 20 par g revient à résoudre l'équation $g(x) = 20$.
  Or , $g(x) = 20 \Leftrightarrow -0,5x + 3,5 = 20 \Leftrightarrow -0,5x = 16,5 \Leftrightarrow x = \dfrac{16,5}{-0,5} = -33$.

4.



Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = h(x)$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de h et de la droite $(\mathscr{D})$.
On en conclut que l'équation $g(x) = h(x)$ a pour solution $x \approx 1,3$.

EXERCICE 2

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+1)^2 - (2x+1)(3x+1)$.

a)
- Pour tout x, $f(x) = (3x+1)^2 - (2x+1)(3x+1) = (3x)^2 + 2\times 3x \times 1 + 1^2 - (6x^2+2x+3x+1) = 9x^2+6x+1-(6x^2+5x+1) = 9x^2+6x+1-6x^2-5x-1 = 3x^2+x$.
- Pour tout x , $f(x) = (3x+1)^2 - (2x+1)(3x+1) = (3x+1)\left((3x+1)-(2x+1)\right) = (3x+1)(3x+1-2x-1) = x(3x+1)$.

b)
- Pour tout x, $f(x) - 24 = 3x^2 + x - 24$;
- Pour tout x, $(x+3)(3x-8) = 3x^2 - 8x + 9x - 24 = 3x^2 + x - 24$;

Donc, $f(x) - 24 = (x+3)(3x-8)$.

c)
- Déterminer les antécédents de 0 par f revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.
  Or, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(3x+1) = 0$.
  Un produit de facteurs étant nul si et seulement l'un des facteurs est nul, on en conclut que cette dernière équation équivaut à :

  · $x = 0$ ou · $3x+1 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$.

  Les antécédents de 0 par f sont donc 0 et $-\dfrac{1}{3}$.
- Déterminer les antécédents de 24 par f revient à résoudre l'équation $f(x) = 24 \Leftrightarrow f(x) = 24$.
  Or, $f(x) - 24 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(3x-8) = 0$.
  Un produit de facteurs étant nul si et seulement l'un des facteurs est nul, on en conclut que cette dernière équation équivaut à :

  · $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou · $3x-8 = 0 \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$.

  Les antécédents de 24 par f sont donc -3 et $\dfrac{8}{3}$.

2. **a)**
- L'image de 14 par g est $g(14) = \dfrac{2\times 14+5}{14-10} = \dfrac{33}{4} = 8,25$.
- L'antécédent de 7 par g est la solution de l'équation $g(x) = 7$.
  Or, $g(x) = 7 \Leftrightarrow \dfrac{2x+5}{x-10} = 7 \Leftrightarrow 2x+5 = 7(x-10) \Leftrightarrow 2x+5 = 7x-70 \Leftrightarrow -5x = -75 \Leftrightarrow x = \dfrac{-75}{-5} = 15$.
  L'antécédent de 7 par g est donc 15 .

b) L'éventuel antécédent de 2 par g est solution de $g(x) = 2$.
Or, $g(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x+5}{x-10} = 2 \Leftrightarrow 2x+5 = 2(x-10) \Leftrightarrow 2x+5 = 2x-20 \Leftrightarrow 0x = -25$.
Comme cette équation n'a pas de solution, 2 n'a pas d'antécédent par g .

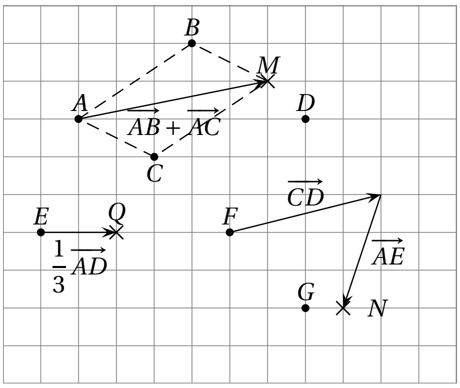
EXERCICE 3

1. Simplifier les expressions vectorielles suivantes :

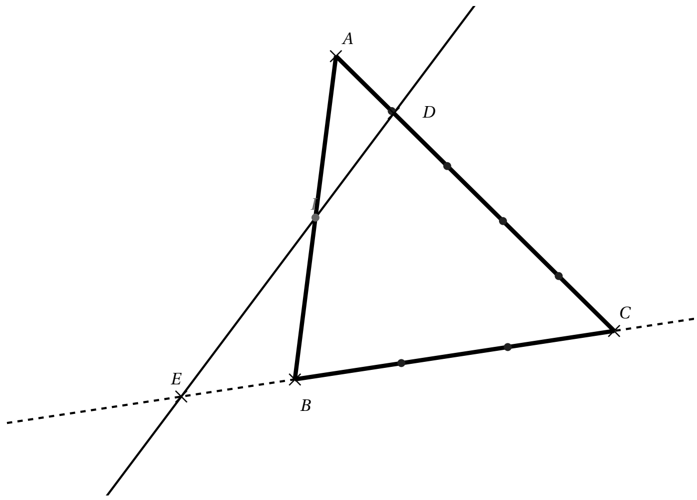
a) $\vec{u}_1 = \overrightarrow{VI} - \overrightarrow{VE} + \overrightarrow{LE} + \overrightarrow{DS} - \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{JE} - \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{SJ} = \overrightarrow{VI} + \overrightarrow{EV} + \overrightarrow{LE} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{SJ} = \overrightarrow{LE} + \overrightarrow{EV} + \overrightarrow{VI} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SJ} + \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{LD}$;

b) $\vec{u}_2 = 2(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) + 3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{BC} = 6\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} - 4(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = 6\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}) = 7\overrightarrow{AB}$.

2.



EXERCICE 4



1. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{8}{15}\overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AI}$.
   Comme I est le milieu du segment $[AB]$, on a $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{DI}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
3. Vérifier que $\dfrac{8}{3}\overrightarrow{DI}=\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{8}{15}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DE}$.
   On en conclut que $\overrightarrow{DE}=\dfrac{8}{3}\overrightarrow{DI}$ et , par suite , que les points D , E et I sont alignés .

EXERCICE 5

1. Voir figure complète à la fin de l'exercice .
2. Grâce aux formules du cours , on sait que le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\dfrac{-3+4}{2}\ ;\ \dfrac{2+(-1)}{2}\right)=(0,5\ ;\ 0,5)$.
3. **a)** $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(3,5-(-3))^2+(7,5-2)^2}$.
   D'où $AB=\sqrt{6,5^2+5,5^2}=\sqrt{42,25+30,25}=\sqrt{72,5}$.

   b) Comme $AK^2=14,5$, $BK^2=58$ et $AB^2=72,5$, on en déduit que $AK^2+BK^2=14,5+58=72,5$ et , par suite , que $AB^2=AK^2+BK^2$.
   On en conclut , grâce à la réciproque du théorème de Pythagore , que le triangle ABK est rectangle en K .
4. Grâce au résultat précédent , on sait la droite (BK) est perpendiculaire à (AK) , ce qui revient à dire que (BK) est la hauteur du triangle ABC issue de B . Comme K est le milieu de $[AC]$, cela signifie que , dans le triangle ABC , la médiane et la hauteur issue de B sont confondues .
   Donc , le triangle ABC est isocèle en B .
5. **a)** Voir figure complète à la fin de l'exercice . $\overrightarrow{BE}=\vec{v}+\overrightarrow{AC}$ ($\vec{v}$ étant le vecteur défini en début d'exercice) .

   b) Comme $\overrightarrow{CD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$, les droites (CD) et (AB) sont parallèles.
   On en conclut que $ABCD$ est un trapèze .

   c) • Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(x_A-x_B\ ;\ y_A-y_B)=(-3-3,5\ ;\ 2-7,5)=(-6,5\ ;\ -5,5)$.
   Donc , le vecteur $\overrightarrow{CD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(1,5\times(-6,5)\ ;\ 1,5\times(-5,5))=(-9,75\ ;\ -8,25)$.
   • Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(x_D-x_C\ ;\ y_D-y_C)=(x_D-4\ ;\ y_D+1)$.
   On en déduit que $x_D-4=-9,75\Leftrightarrow x_D=-9,75+4=-5,75$ et $y_D+1=-8,25\Leftrightarrow y_D=-8,25-1=-9,25$.
   Donc , le point D a pour coordonnées $(-5,75;-9,25)$.

   d) • Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(x_C-x_A\ ;\ y_C-y_A)=(4-(-3)\ ;\ -1-2)=(7\ ;\ -3)$.
   Donc , le vecteur $\overrightarrow{BE}=\vec{v}+\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-11+7\ ;\ -9-3)=(-4\ ;\ -12)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(x_E - x_B\ ;\ y_E - y_B) = (x_E - 3,5\ ;\ y_E - 7,5)$.

On en déduit que $x_E - 3,5 = -4 \Leftrightarrow x_E = -4 + 3,5 = -0,5$ et $y_E - 7,5 = -12 \Leftrightarrow y_E = -12 + 7,5 = -4,5$.
Donc , le point E a pour coordonnées $(-0,5; -4,5)$.