Correction du devoir de révisions

EXERCICE 1

1. **a)** • Pour tout $x \neq 4$, $2+\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{2(4-x)}{4-x}+\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{2(4-x)+1}{4-x}=\dfrac{8-2x+1}{4-x}=\dfrac{9-2x}{4-x}$.

Donc, pour tout $x \neq 4$, $\dfrac{9-2x}{4-x}=2+\dfrac{1}{4-x}$.

• On note $P(n)$ la propriété : « $u_n \leqslant 3$ ».

On va démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier n , par récurrence.

· **Initialisation** : Comme $u_0=2$, on a bien $u_0 \leqslant 3$. Donc , la propriété est vraie au rang $n=0$.

· **Hérédité** : Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel $k \geqslant 0$ et montrons que , sous cette hypothèse, elle l'est au rang suivant .

Si $u_k \leqslant 3$, alors $-u_k \geqslant -3 \Rightarrow 4-u_k \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4-u_k} \leqslant 1 \Rightarrow 2+\dfrac{1}{4-u_k} \leqslant 3$, ce qui établit la propriété au rang $k+1$.

· **Conclusion** : Comme la propriété $P(n)$ est vraie pour $n=1$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang, on en en déduit qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Pour tout n , $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9-2u_n}{4-u_n}-u_n=\dfrac{9-2u_n-u_n(4-u_n)}{4-u_n}=\dfrac{9-2u_n-4u_n+u_n^2}{4-u_n}=\dfrac{u_n^2-6u_n+9}{4-u_n}=\dfrac{(u_n-3)^2}{4-u_n}$.

c) Comme $u_n \leqslant 3$, $4-u_n \geqslant 1>0$, donc $\dfrac{(u_n-3)^2}{4-u_n} \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$.

On en conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3 , elle converge vers une limite ℓ .

d) • Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ , on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$.

• Comme $u_{n+1}=\dfrac{9-2u_n}{4-u_n}$, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{9-2u_n}{4-u_n}\right)=\dfrac{9-2\ell}{4-\ell}$.

• Par unicité de la limite , on en déduit que $\ell=\dfrac{9-2\ell}{4-\ell}$.

• $\ell=\dfrac{9-2\ell}{4-\ell} \leftrightarrow \ell(4-\ell)=9-2\ell \Leftrightarrow 4\ell-\ell^2=9-2\ell \Leftrightarrow 9-2\ell-4\ell+\ell^2=0 \Leftrightarrow \ell^2-6\ell+9=0.$

2. **a)** • Pour tout n , $v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{9-2u_n-5(4-u_n)}{4-u_n}}{\dfrac{9-2u_n-3(4-u_n)}{4-u_n}}=\dfrac{\dfrac{9-2u_n-20+5u_n}{4-u_n}}{\dfrac{9-2u_n-12+3u_n}{4-u_n}}=\dfrac{\dfrac{3u_n-11}{4-u_n}}{\dfrac{u_n-3}{4-u_n}}=\dfrac{3u_n-11}{4-u_n}\times\dfrac{4-u_n}{u_n-3}=\dfrac{3u_n-11}{u_n-3}$.

• Pour tout entier n, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{3u_n-11}{u_n-3}-\dfrac{u_n-5}{u_n-3}=\dfrac{3u_n-11-u_n+5}{u_n-3}=\dfrac{2(u_n-3)}{u_n-3}=2.$

• Comme $v_{n+1}-v_n=2 \Leftrightarrow v_{n+1}=v_n+2$, on en conclut que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=2$.

b) Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=2$, on sait que , pour tout entier n, $v_n=v_0+n\times r=v_0+2n$.

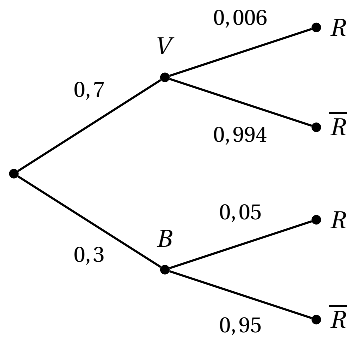
Comme $v_0=\dfrac{u_0-5}{u_0-3}=\dfrac{2-5}{2-3}=3$, on obtient $v_n=3+2n$.

c) • Comme, pour tout entier n , $u_n=\dfrac{3v_n-5}{v_n-1}$ et $v_n=3+2n$, on obtient : $u_n=\dfrac{3(3+2n)-5}{(3+2n)-1}=\dfrac{9+6n-5}{3+2n-1}=\dfrac{6n+4}{2n+2}=\dfrac{3n+2}{n+1}$.

• Pour tout entier n , $\dfrac{3n+2}{n+1}=\dfrac{n\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{3+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$.

• Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

EXERCICE 2



1. • Comme il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps , on a : $p(V) = 0,7$ et $p(B) = 1 - 0,7 = 0,3$;
   • Puisque,les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4% , on a : $p_V(\overline{R}) = 0,994$ (et $p_V(R) = 1 - 0,994 = 0,006$) ;
   • Comme,lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas, on a : $p_V(R) = 0,05$ (et $p_B(\overline{R}) = 1 - 0,05 = 0,95$) ;
   On peut donc représenter la situation de l'énoncé au moyen de l'arbre pondéré ci-contre.
2. La probabilité de $V \cap R$ est $p(V \cap R) = p_V(R) \times p(V) = 0,006 \times 0,7 = 0,0042$.
3. La probabilité de R est $p(R) = p(V \cap R) + p(B \cap R) = p_V(R) \times p(V) + p_B(R) \times p(B) = 0,006 \times 0,7 + 0,3 \times 0,05 = 0,0192$.
4. La probabilité demandée est $p_R(B)$. Or, $p_R(B) = \dfrac{p(B \cap R)}{p(R)} = \dfrac{p_B(R) \times p(B)}{p(R)}$.

   Donc, la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus sachant qu'il est arrivé en retard est $p_R(B) = \dfrac{0,05 \times 0,3}{0,0192} = \dfrac{25}{32} = 0,78125$.

EXERCICE 3

1. **a)** Pour tout x , $g'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$. $3(x^2 - 4)$ est un polynôme de degré 2 ayant pour racines -2 et 2 .
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-6		-2		2		4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-126	$\nearrow$	34	$\searrow$	2	$\nearrow$	34

   b) D'après le tableau de variations , on constate que $[-2 ; 4]$, la fonction g admet un minimum égal à 2 .
   Donc, l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $[-2 ; 4]$.

   c) • g est strictement croissante sur $[-6 ; -2]$;
   • g est continue sur $[-6 ; -2]$;
   • 0 est compris entre $g(-6) = -126$ et $g(-2) = 34$
   On en conclut , grâce au théorème des valeurs intermédiaires , que $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-6 ; -2]$.

   d) On note α la solution de $g(x) = 0$. Grâce à la calculatrice , on obtient $g(-4,06) = -24,136$ et $g(-4,05) = 35,830125$.
   On en déduit que $g(-4,06) < 0 < g(-4,05) \Leftrightarrow g(-4,06) < g(\alpha) < g(-4,05) \Leftrightarrow -4,06 < \alpha < -4,05$, car la fonction g est croissante sur $[-6 ; -2]$.
2. Comme g est croissante sur $[-6 ; 2]$,

   • Si $-6 \leqslant x < \alpha$, alors $g(-6) \leqslant g(x) < g(\alpha) \Rightarrow g(x) < 0$;
   • Si $\alpha \leqslant x < -2$, alors $g(\alpha) \leqslant g(x) < g(-2) \Rightarrow g(x) > 0$.

x	-6		α		4
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

3. Pour tout réel $-6 \leqslant x \leqslant 4$, $f'(x) = 4x^3 - 24 \times 2x + 72 = 4x^3 - 48x + 72 = 4(x^3 - 12x + 18) = 4g(x)$.
   On en déduit que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$. En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit que :

   • f est décroissante sur $[-6 ; \alpha]$;
   • f est croissante sur $[\alpha ; 4]$.

EXERCICE 4

1. **a)** Pour tout z , $(z-2\mathrm{i})(z^2-2z+4) = z^3-2z^2+4z-2\mathrm{i}z^2+4\mathrm{i}z-8\mathrm{i} = z^3-(2+2\mathrm{i})z^2+(4+\mathrm{i})z-8\mathrm{i} = z^3-2(1+\mathrm{i})z^2+4(1+\mathrm{i})-8\mathrm{i} = P(z)$
Donc, $P(z) = (z-2\mathrm{i})(z^2-2z+4)$.

b) d'après ce qui précède, $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2\mathrm{i})(z^2-2z+4) = 0$.
Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, cette dernière équation équivaut donc à :

- $z-2\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow z = 2\mathrm{i}$ ou
- $z^2-2z+4 = 0$.

Comme le discriminant de z^2-2z+4 est $\Delta = (-2)^2-4\times1\times4 = -12$, on en déduit que l'équation $z^2-2z+4 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-2)-\mathrm{i}\sqrt{12}}{2\times1} = \frac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1-\mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \frac{-(-2)+\mathrm{i}\sqrt{12}}{2\times1} = \frac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $\mathscr{S} = \left\{2\mathrm{i}\ ;\ 1-\mathrm{i}\sqrt{3} ; 1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

2.
- Le module de $2\mathrm{i}$ est 2 et un argument est $\frac{\pi}{2}$. Donc, la forme trigonométrique de $2\mathrm{i}$ est $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$.
- $|z_1| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.
  En notant $\theta = \arg(z_1)$,on doit donc avoir :

  · $2\cos\theta = 2 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$;

  · $2\sin\theta = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

  On en déduit qu'un argument de z_1 est $\theta = -\frac{\pi}{3}$ et , par suite, que la forme trigonométrique de z_1 est

  $$z_1 = 2\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

- $|z_2| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.
  En notant $\theta = \arg(z_2)$,on doit donc avoir :

  · $2\cos\theta = 2 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$;

  · $2\sin\theta = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

  On en déduit qu'un argument de z_2 est $\theta = \frac{\pi}{3}$ et , par suite, que la forme trigonométrique de z_2 est

  $$z_2 = 2\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

3. Le nombre a est égal à z_2 avec les notations précédentes . Donc, un argument de a est $\frac{\pi}{3}$.
Grâce aux propriétés algébriques de l'argument d'un nombre complexe, on sait qu'un argument de a^6 est $6\times\arg(a)$, c'est-à-dire,ici : $6\times\frac{\pi}{3} = 2\pi$.
Puisqu'un argument de a^6 est 2π ou $0\ \ [2\pi]$, on en déduit que a^6 est un nombre réel (strictement positif) .

EXERCICE 5

Partie A

1. On sait que $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AG}$.
Comme I milieu du segment $[AB]$, on sait que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$

2.
- Comme J et K sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AD]$, on sait que :

  · $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;

  · $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

- $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

  On en déduit que $\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ} + \frac{1}{6}\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$.

  On en conclut que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ} + \frac{1}{6}\overrightarrow{IK}$.

  On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires et , par suite , que les points G , I , J et K sont coplanaires .

Partie B

1. • · Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\left(x_D - x_C\ ;\ y_D - y_C\ ;\ z_D - z_C\right) = (-2-1\ ;\ 0-(-3)\ ;\ 1-0) = (-3\ ;\ 3\ ;\ 1)$.

· Le vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\times(-3)\ ;\ \frac{1}{3}\times 3\ ;\ \frac{1}{3}\times 1\right) = \left(-1\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

· Comme le vecteur $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $\left(x_M - x_C\ ;\ y_M - y_C\ ;\ z_M - z_C\right) = \left(x_M - 1\ ;\ y_M - (-3)\ ;\ z_M - 0\right) = \left(x_M - 1\ ;\ y_M + 3\ ;\ z_M\right)$.

· On en déduit que le triplet $(x_M\ ;\ y_M\ ;\ z_M)$ est solution du système : (S) $\left\{\begin{array}{l} x_M - 1 = -1 \\ y_M + 3 = 1 \\ z_M = \frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Comme $\left\{\begin{array}{l} x_M - 1 = -1 \\ y_M + 3 = 1 \\ z_M = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_M = 0 \\ y_M = -2 \\ z_M = \frac{1}{3} \end{array}\right.$, on en conclut que M a pour coordonnées $\left(0\ ;\ -2\ ;\ \frac{1}{3}\right)$

- Comme N le milieu de $[BM]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{x_B + x_M}{2}\ ;\ \frac{y_B + y_M}{2}\ ;\ \frac{z_B + z_M}{2}\right) = \left(\frac{2+0}{2}\ ;\ \frac{3+(-2)}{2}\ ;\ \frac{-1+\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{3}\right)$.
- Comme L le milieu de $[AN]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{x_A + x_N}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_N}{2}\ ;\ \frac{z_A + z_N}{2}\right) = \left(\frac{-1+1}{2}\ ;\ \frac{0+\frac{1}{2}}{2}\ ;\ \frac{5-\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(0\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{7}{3}\right)$.

2. **a)** Pour montrer que A , B , D et P sont coplanaires , il suffit d'établir que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont coplanaires , c'est-à-dire qu'il existe des coefficients α et β telles que $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A\right) = (2-(-1)\ ;\ 3-0\ ;\ -1-5) = (3\ ;\ 3\ ;\ -6)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\left(x_D - x_A\ ;\ y_D - y_A\ ;\ z_D - z_A\right) = (-2-(-1)\ ;\ 0-0\ ;\ 1-5) = (-1\ ;\ 0\ ;\ -4)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AP}$ a pour coordonnées $\left(x_P - x_A\ ;\ y_P - y_A\ ;\ z_P - z_A\right) = (-0,2-(-1)\ ;\ 0,9-0\ ;\ 2,8-5) = (0,8\ ;\ 0,9\ ;\ -2,2)$.
- Le vecteur $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$ a donc pour coordonnées $\left(3\alpha - \beta\ ;\ 3\alpha\ ;\ -4\alpha - 6\beta\right)$.
- Trouver les coefficients α et β telles que $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$ revient donc à résoudre le système (S) $\left\{\begin{array}{l} 3\alpha - \beta = 0,8 \\ 3\alpha = 0,9 \\ -6\alpha - 4\beta = -2,2 \end{array}\right.$

  . À l'aide des deux premières lignes du système, on obtient $\alpha = \frac{0,9}{3} = 0,3$ et $\beta = 3\alpha - 0,8 = 3\times 0,3 - 0,8 = 0,1$.

  Comme $-6\times 0,3 - 4\times 0,1 = -2,2$, on en déduit que le système (S) a pour couple-solution $(0,3\ ;\ 0,1)$ et , par suite , que $\overrightarrow{AP} = 0,3\overrightarrow{AB} + 0,1\overrightarrow{AD}$.

  On en conclut que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont coplanaires, ce qui revient à dire que les points A , B , D et P sont coplanaires.

b) Comme l'on sait que P appartient au plan (ABD) ,pour montrer qu'il est le point d'intersection de la droite (CL) et du plan (ABD) , il suffit de vérifier que C , L et P sont alignés , ce qui revient à établir que les vecteurs $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont colinéaires .

- Le vecteur $\overrightarrow{CL}$ a pour coordonnées $\left(x_L - x_C\ ;\ y_L - y_C\ ;\ z_L - z_C\right) = \left(0-1\ ;\ \frac{1}{4}-(-3)\ ;\ \frac{7}{3}-0\right) = \left(-1\ ;\ \frac{13}{4}\ ;\ \frac{7}{3}\right)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{CP}$ a pour coordonnées $\left(x_P - x_C\ ;\ y_P - y_C\ ;\ z_P - z_C\right) = (-0,2-1\ ;\ 0,9-(-3)\ ;\ 2,8-0) = (-1,2\ ;\ 3,9\ ;\ 2,8)$.
- On constate donc que $\overrightarrow{CP} = 1,2\overrightarrow{CL}$, donc $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont colinéaires.

On en conclut que P est le point d'intersection de la droite (CL) et du plan (ABD) .