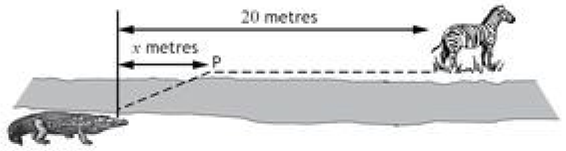
I- Le problème du zèbre et du crocodile :



The time taken, T, measured in tenths of a second, is given by

$$T(x) = 5\sqrt{36+x^2} + 4(20-x)$$

La première question porte sur le temps que mettra le crocodile s'il attaque le zèbre en nageant : $T(20)=5\sqrt{36+20^2}+4(20-20)=5\sqrt{436}\approx 104{,}4$ soit environ 10,4 secondes (*T* est en dixièmes de secondes)
La deuxième question demande le temps mis par le crocodile s'il coupe la rivière au plus court, ce qui correspond au calcul de $T(0)=5\sqrt{36}+4\times 20=110$ soit 11 secondes.
La question délicate est la dernière, quelle est la distance x pour laquelle le temps est minimal et quel est ce temps minimal ?

On étudie les variations de T, en passant par le signe de la dérivée, car T est dérivable sur [0;20] puisque u(x)=36+x² est strictement positif et dérivable (polynôme) et que donc $\sqrt{u}$ l'est aussi.
$T=5\sqrt{u}+v$ donc $T'=\dfrac{5u'}{2\sqrt{u}}+v'$ soit $T'(x)=\dfrac{5\times 2x}{2\sqrt{x^2+36}}+4\times(-1)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+36}}-4=\dfrac{5x-4\sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}}$ et la difficulté est d'étudier son signe, le dénominateur est certes positif mais le numérateur ? On peut se débarrasser de la racine carrée en multipliant numérateur et dénominateur par $5x+4\sqrt{x^2+36}$ qui est forcément positif car $x\in[0;20]$ est positif donc 5x aussi et on lui ajoute une racine carrée. On obtient

$$T(x)=\frac{(5x-4\sqrt{x^2+36})(5x+4\sqrt{x^2+36})}{\sqrt{x^2+36}\times(5x+4\sqrt{36+x^2})}=\frac{25x^2-16(x^2+36)}{\sqrt{x^2+36}\times(5x+4\sqrt{36+x^2})}=\frac{9x^2-576}{\sqrt{x^2+36}\times(5x+4\sqrt{36+x^2})}\Leftrightarrow$$

$$T(x)=\frac{(3x-24)(3x+24)}{\sqrt{x^2+36}\times(5x+4\sqrt{36+x^2})}$$

Parmi les quatre facteurs deux sont positifs (déjà dit) et 3*x*+24 aussi car $x\in[0;20]$ et donc le signe de la dérivée ne dépend que de 3*x*-24 qui est positif si et seulement si *x*>8 on en déduit le signe de *T'* et les variations de *T* avec un minimum en x=8 qui vaut donc T(8)=98 soit 9,8 secondes.

II- La grenouille et le crapaud

On doit déterminer si les suites, définies par $f_1=32$ et pour tout *n*>0 $f_{n+1}=\dfrac{1}{3}f_n+32$ puis par $t_1=13$ et $t_{n+1}=\dfrac{3}{4}t_n+13$ pour tout *n*>0, sont majorées par 50 ou non.
On peut les programmer à la calculatrice, et on trouve alors que $t_{12}\approx 50{,}3$ donc le crapaud atteindra les 50 mètres ; mais que la suite *f* semble converger vers 48 en étant croissante et donc ne dépassera jamais 48 : on le montre par exemple par récurrence, en prouvant que pour tout *n* >0 $f_n<48$
initialisation : $f_1=32<48$ c'est vrai.
Hérédité : On montre que si $f_n<48$ (pour *n*>0) alors $f_{n+1}<48$
En effet par hypothèse de récurrence $f_n<48$ donc $\dfrac{1}{3}f_n<16$ et donc $\dfrac{1}{3}f_n+32<48$ en multipliant par un tiers puis en ajoutant 32, ce qui donne $f_{n+1}<48$ et donc , l'hérédité étant montrée, la récurrence est finie : on a bien montré que la suite *f* est majorée par 48 et donc que la tortue ne dépassera jamais les 50m.