AP : Sujets de bac sur les lois à densité.

I- D'après un sujet de TES, en version non guidé

Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :

— premier temps : étude du dossier présenté par le candidat ;

— deuxième temps : entretien en vue du recrutement.

Le processus de recrutement mis en œuvre par l'entreprise est le suivant :

— si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines ;

— si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests puis est reçu en entretien par le directeur de l'entreprise.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas.

À l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :

• 30 % des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité ;

• 20 % des candidats n'ayant pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés ;

• 38 % des candidats ont été recrutés.

1. On prend un candidat au hasard et on note :

• D l'évènement « le candidat a un dossier jugé de bonne qualité » ;

• R l'évènement « le candidat est recruté par l'entreprise ».

a- Calculer la probabilité que le candidat n'ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté par l'entreprise.

On cherche $P(\overline{D}\cap\overline{R})=P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(\overline{R})=0{,}7\times0{,}8=0{,}56$

b- Calculer la probabilité qu'un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité.

On cherche $P_D(R)=\dfrac{P(D\cap R)}{P(D)}$ *mais si on connaît P(D)=0,3, on ne connaît pas* $P(D\cap R)$ *sauf indirectement car on peut calculer* $P(\overline{D}\cap R)=P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(R)=0{,}7\times0{,}2=0{,}14$ *et on nous donne P(R)=0,38 d'où on tire* $P(D\cap R)=0{,}38-0{,}14=0{,}24$ *puis* $P_D(R)=\dfrac{P(D\cap R)}{P(D)}=\dfrac{0{,}24}{0{,}3}=0{,}8$ *soit 80 % de chance d'être recruté pour ceux qui ont un bon dossier.*

2- Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée.

On commence par identifier un schéma de Bernoulli puisqu'on répète de manière indépendante une épreuve à deux issues : recruté ou non. X compte le nombre de personnes recrutées, X suit donc la loi binomiale B(10;0,38) (car 10 candidats et P(R)=0,38).

On cherche $P(X\geqslant1)=1-P(X=0)=1-0{,}62^{10}$ *puisque la probabilité d'un « échec » est de 1-0,38=0,62 et qu'un seul chemin correspond à 10 échecs.*

3- Deux amis, Aymeric et Coralie, sont convoqués le même jour pour un entretien avec la direction des ressources humaines. Coralie arrive à 8 h 30 alors qu'Aymeric arrive au hasard entre 8 h et 9 h.

On désigne par T la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'Aymeric et on admet que T suit la loi uniforme sur l'intervalle [8 ; 9]. Déterminer la probabilité pour que Coralie attende Aymeric plus de dix minutes.

La probabilité cherchée est $P\left(T>0{,}5+\dfrac{10}{60}\right)$ *puisque Coralie arrive à 8h30 soit 0,5h après 8h et qu'on cherche la probabilité qu'elle attende plus de 10 minutes soit* $\dfrac{10}{60}$ *heures.*

$$P\left(T>0{,}5+\frac{10}{60}\right)=P\left(T>\frac{2}{3}\right)=\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{1}{9-8}\,dx=\frac{1-\frac{2}{3}}{9-8}=\frac{1}{3}$$

Qu'on peut calculer sans passer par l'intégrale, voire en remarquant qu'il arrive au hasard (de manière uniforme) entre 0 et 60 minutes après 8h et que Coralie attendra plus de dix minutes s'il arrive dans les 20 dernières donc $\dfrac{20}{60}=\dfrac{1}{3}$.

II- Pondichéry avril 2014 (début, avec une ROC au 2b)

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.
Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ.

2. **a.** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.

b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

Correction de l'APMEP : http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Pondichery_S_avril_2014.pdf

III-Extrait d'un QCM

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda=\frac{1}{8}$ .La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 b. 0,250 c. 0,472 d. 0,528

On cherche $P(X\geqslant 6)=1-P(X<6)=1-\int_0^6 \frac{1}{8}e^{\frac{-1}{8}x}dx=1-[-e^{\frac{-1}{8}x}]_0^6=1-(-e^{\frac{-6}{8}}+1)=e^{-0,75}\approx 0,472$ *qu'on peut donner avec les formules sans passer par l'intégrale.*

VI-Extrait d'un VF

On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.

Affirmation 1 : « La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est 0,7 environ. »

On cherche $P(T\geqslant 5)=e^{-0,7\times 5}=e^{-3,5}\approx 0,03$ *c'est donc faux. (calcul analogue au précédent si on veut détailler)*

Affirmation 2 : « Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »

Pour une loi exponentielle l'espérance est donnée par $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,7}\approx 1,43$ *et non 7 minutes, faux aussi.*

V-Début d'un exercice de métropole septembre 2014

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients. On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

a. Déterminer la valeur de λ.

b. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ?

c. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ?

Corrigé de l'APMEP :
http://www.apmep.fr/IMG/pdf/corrige_Metropole_S_11_sept_2014_.pdf

VI-Probabilités conditionnelles et exponentielles : Antilles Guyane septembre 2014.
Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que
• 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
• 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.
On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note
• N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
• A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage) .
On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.
1. On sait que $P(D \leqslant 4)=0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice. Calculer la valeur exacte de λ.
2. On prendra ici λ = 0,1733.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître. Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Corrigé de l'APMEP : http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Antilles_S_sept_2014_corr.pdf