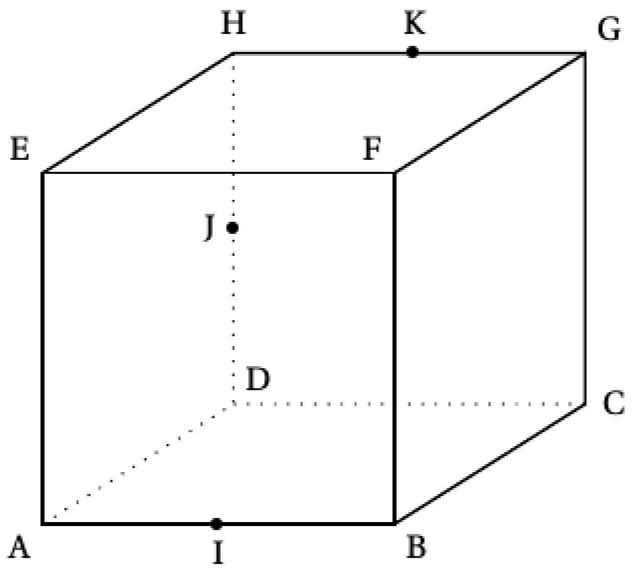
Correction AP Géométrie dans l'espace (sans logiciel, sans vecteur)

I-On considère le cube ABCDEFGH ci dessous, et les points I,J,K milieux respectifs de [AB],[HD] et [HK]



Version guidée :

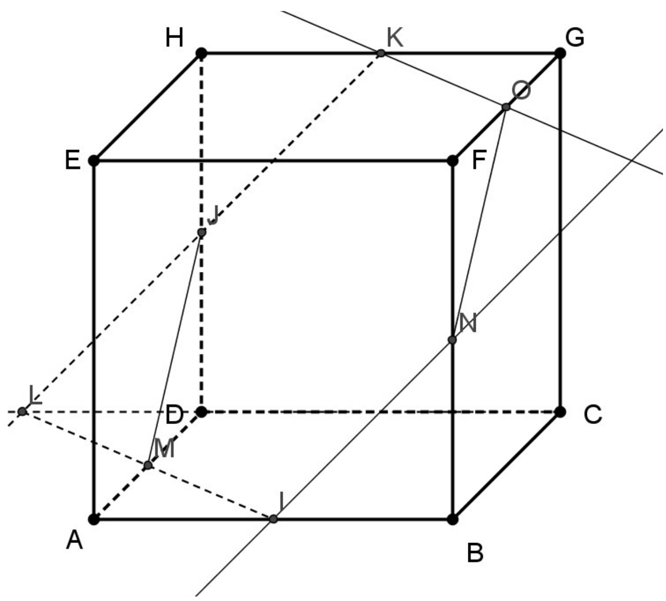
1-a- Déterminer l'intersection de (JK) avec le plan (ABC)

(KJ) et (DC) sont deux droites non parallèles du plan (HGC) donc elles se coupent en un point L qui appartient à la droite (JK) et au plan (ABC), c'est donc l'intersection des deux.

b- En déduire l'intersection des plans (IJK) et (ABC)

Les points I et L appartiennent aux deux plans, et l'intersection de deux plans non parallèles est une droite, donc la droite cherchée est (LI)

c- Terminer le tracé de la section du cube par IJK.



La droite (IL) est incluse dans le plan (ABC) tout comme (AD)à laquelle elle n'est pas parallèle donc elles sont sécantes en un point M dui appartient au segment [AD] (et qui en fait en est le milieu).

On connaît donc déjà trois segments de cette section : [KJ] (avec la face arrière) ; [JM] (face de gauche) et [MI] (face « du sol »), il suffit alors d'utiliser la propriété qui dit que deux plans parallèles sont coupés par un même plan selon des droites parallèles, et donc par exemple l'intersection du plan (ABF) par le plan (IJK) est une droite parallèle à (JK) puisque les plans (ABF) et (HGC) sont parallèles (faces opposées du cube) et que (IJK) coupe (HGC) selon (JK).

Mais I appartient aux plans (IJK) et (ABF) donc l'intersection des deux est la parallèle à (JK) passant par I.

Elle coupe [BF] en un point N (le milieu en fait).

On peut alors tracer soit la parallèle à (JM) passant par N soit la parallèle à (MI) passant par K, avec la même propriété (Les faces opposées du cube étant parallèles sont coupées par (IJK) selon des droites parallèles).Toutes deux se coupent sur [FG] en un point O (le milieu là encore). La section est l'hexagone (régulier en fait) KJMINO.

2- a- Justifier que CI=EI

On peut utiliser le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles CBI et EAI ce qui donne $CI^2=BC^2+BI^2$ et $EI^2=AE^2+AI^2$ mais AE=CB et AI=BI donc CI=EI.

b- Que représente le plan (IJK) pour le segment [CE]

On peut montrer de même que CK=EK et JE=JC, et donc que I,J et K sont équidistants des points E et C c.a.d que (IJK) est le plan médiateur de [CE].

c- En déduire que (CE) est perpendiculaire au plan (IJK).

On sait que le plan médiateur d'un segment lui est perpendiculaire donc (CE) est perpendiculaire à (IJK).

3- a- Justifier que (CE) et (KJ) sont orthogonales.

On vient de voir que (CE) est orthogonale au plan (IJK) donc à toutes les droites du plan, y compris (JK)

b-En raisonnant par l'absurde, montrer que (CE) et (KD) ne sont pas orthogonales.

Si (CE) est orthogonale à (KJ) en plus de (KD) alors elle est orthogonale au plan (KDJ), mais c'est le plan (HGC) (la face arrière du cube), auquel (CE) diagonale du cube n'est pas orthogonale : Contradiction, l'hypothèse de départ est fausse : (JK) n'est pas orthogonale à (CE).

4-a- On note (ou rebaptise) M le milieu de [AD] dont on admet qu'il appartient au plan (IJK) . Justifier que (BD) et (IM) sont parallèles.

C'est le théorème de la droite des milieux, ou la réciproque du théorème de Thalès.

b- Quelles sont les positions relatives de la droite (BD) et du plan (IJK)

(BD) est parallèle à une droite du plan (IJK) d'après la question précédente, donc elle est parallèle au plan.

5- Montrer que (BDG) et (IJK) sont parallèles.

On a besoin de deux couples de droites parallèles deux à deux et sécantes deux à deux, plus précisément (BD) et (IM) sont parallèles et pour les mêmes raisons (théorème de la droite des milieux) (JK) et (DG) le sont.
Or (IM) et (JK) sont deux droites sécantes du plan (IJK) (elles se coupent en L vu au 1) et (DG) et (BD) deux droites sécantes de (BDG), donc les plans sont parallèles.

II-Orthogonalité.On reste dans un cube ABCDEFGH.

1- Montrer que la droite (HF) est orthogonale au plan (EGC)

Pour l'orthogonalité d'une droite et d'un plan il nous faut montrer que la droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan, or (HF) et (EG) sont perpendiculaires (diagonales d'un carré) et comme nous sommes dans un cube (GC) est orthogonale au plan (EFG) donc à toutes les droites du plan notamment (HF).
(HF) est donc orthogonale à deux droites sécantes de (EGC) donc au plan (EGC).

2-Montrer que (HF) et (EC) sont orthogonales.

Encore une application du théorème « de la porte », (HF) orthogonale au plan (EGC) donc à toutes les roites de (EGC) y compris (EC).

3-On admet que de même (AF) est orthogonale à (EC), en déduire que la droite (EC) est orthogonale à (AH).

(EC) est donc orthogonale à (HF) et à (AF) donc au plan (AHF) et donc à (AH).